CLASSE DE 2TSI
PREPARATION PLANCHES ORAUX

Planche 01. CCS 2019

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ en fonction de $a > 0$.

Planche 02. CCS 2019

Ici, la fonction f est continue sur $J \subset \mathbf{R}$, F est une primitive de f et enfin, u et v sont deux fonctions de classe C^1 de I dans J.

1. Montrer que $H : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur I et donner sa dérivée.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que $G : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}\,dt$ est de classe C^1 et calculer $G'(x)$.
4. Calculer $\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$, $\int_0^b \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}\,dt$, où $b > 0$ fixé puis $\int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}\,dt$.

Planche 03. CCS 2019

On pose $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $M \mapsto \mathrm{Tr}\,(M)\, I_n$ et $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $M \mapsto M - 2\,\phi(M)$.

1. Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,\phi = \mathrm{Vect}\, I_n$ et que $\dim \mathrm{Ker}\,\phi = n^2 - 1$.

   Dans la suite, on suppose $n = 2$.
3. Montrer que ψ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

   ψ est-il diagonalisable ?
4. Trouver une matrice P orthogonale telle que $P^T A P$ soit diagonale.
5. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\psi$ et en déduire que ψ est bijective.

Planche 04. CCS 2019

On se place dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur droite D : $2x = 6y = 3z$ puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à D.

Planche 05. CCINP 2019

1. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sin x$.
2. Montrer que $x \ln x - \sin x\, \ln(\sin x) \sim \frac{x^3}{6} \ln x$

au voisinage de 0.

Planche 06. CCINP 2019

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer une base de $\mathsf{Ker}\, A$ puis de $\mathrm{Im}\, A$ puis montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
3. Quelle est la matrice de l'endomorphisme associé dans cette nouvelle base ?

Planche 07. CCINP 2019

Trouver les valeurs $m \in \mathbf{R}$ pour lesquelles $A_m = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puis pour ces valeurs m, calculer A_m^n en fonction d'une matrice diagonale, pour $n \in \mathbf{N}$.

Planche 08. CCINP 2019

On note E l'ensemble des suites réelles de période $p \in \mathbf{N}^\star$, c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+p} = u_n.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel contenant pour tout entier i, la suite U^i définie par $u_n^i = 1$ si $n - i$ est un multiple de p et $u_n^i = 0$ sinon.
2. Montrer que $(U^i)_{i \in [\![0,\, p-1]\!]}$ est une famille libre.
3. Déterminer une base de E et donner sa dimension.

Planche 09. CCINP 2019

Soit pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^2 \sin^2 t}$ et $a_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^2 \sin^2 t}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,\, \pi]$, $\sin t \leqslant t$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $a_n \geqslant \dfrac{\arctan(n\pi^2)}{n\pi}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} \leqslant u_n \leqslant a_n$.
4. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Planche 10. CCINP 2019

Soient X et Y deux v.a.r **indépendantes** telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(X = n) = P(Y = n) = q^n p$, où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On pose aussi $S = X + Y$.

1. Donner l'ensemble image de $X + 1$, de $Y + 1$ et de S.
2. Montrer que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent une loi géométrique de paramètre p puis donner $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Déterminer la loi de S.
4. Soit la v.a.r $I = \min(X, Y)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(I \geqslant k) = q^{2k}$ et en déduire la loi de I. Calculer $E(I)$ et $V(I)$.

Planche 11. CCS 2019

On place n boules dans n tiroirs numérotés et on note V_n (respectivement Y_n) le nombre de tiroirs vides (respectivement non vides).

1. Déterminer la loi de N_i qui est le nombre de boules dans le $i^{\text{ème}}$ tiroir.
2. On note A_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tiroir est vide ». Calculer $P(A_i)$.
3. On note $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$, $\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A \end{cases}$. Montrer : $V_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n 1_{A_i}$.
4. Calculer $E(1_A)$ en fonction de $P(A)$ et en déduire l'espérance de V_n puis celle de Y_n.

Planche 12. CCINP 2018

Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t)+x_2(t) \\ x_2'(t) & = & 2x_2(t) \\ x_3'(t) & = & 2x_1(t)-3x_2(t)+4x_3(t) \end{array}\right.$

Planche 13. CCINP 2018

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!16^n}$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^{1/2} 2t\,\cos(t^2)\,dt$ et d'un développement en série entière.

Planche 14. CCINP 2018

X et Y sont deux v.a.r indépendantes qui suivent toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose la matrice $M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ en fonction de e^x et de e^{-x}.
2. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
3. Quelle est la probabilité que M admette 0 pour valeur propre ?
4. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

Planche 15. CCINP 2018

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Planche 16. CCINP

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle, $\langle\, ,\, \rangle$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel. Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + \langle \vec{x},\, \vec{u}\rangle \vec{u} + \sqrt{3}\,\vec{u}\wedge\vec{x}\right).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier que l'on peut compléter $\vec{u}$ en $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v},\, \vec{w})$ en base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
3. Préciser la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et reconnaître f.
4. On suppose que $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Préciser la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Planche 17. CCS 2017

1. Montrer que la suite de terme général $w_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\,dt$ est bornée et que tous ses termes de rang impairs sont nuls.
2. En déduire la parité de $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n z^n$ et minorer son rayon de convergence.
3. Montrer que (w_{2n}) est une suite décroissante et que $w_{2n+2} + w_{2n} = \dfrac{2}{2n+1}$.
4. Montrer que la suite (w_{2n}) tend vers 0 et que $w_{2n} \sim \dfrac{1}{2n}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n (-1)^n w_{2n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Planche 18. CCS 2017

1. Montrer que $f : (x,y) \mapsto x^2y + \ln(1+y^2)$ possède un minimum et un maximum sur $A = [-1,1]^2$.
2. Montrer que f possède un point critique sur $B =]-1,1[^2$.
3. $(0,0)$ est-il un extremum de f ? (On pourra calculer $f(x,x^3)$).
4. Trouver le minimum et le maximum de f sur A.

Planche 19. CCINP

On pose $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Montrer : $\forall k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leqslant u_{k-1}$.
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

Planche 20. CCINP

Soit la fonction $f : t \mapsto |\cos t|$.

1. Montrer que f est paire et π-périodique.
2. Donner la série de Fourier de f.
3. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Planche 21. CCINP 2017

Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Planche 22. CCINP 2018

On pose pour un entier n non nul fixé, $\phi_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$

1. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle positive u_n pour laquelle $\phi_n(u_n) = 1$.
   Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que $u_n(1-u_n^n) = 1 - u_n$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et bornée et en déduire sa limite.

Planche 23. CCINP 2018

Résoudre dans $\mathbf{C}$, les deux équations

$$z^2 + \bar{z} - 1 = 0 \text{ et } z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0.$$

Planche 24. CCINP 2017

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $z \in \mathbb{C}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A. Est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$? Calculer A^n.
2. On choisit $z = 2i$. Calculer les racines carrées de z et résoudre : $t^2 - 2t + 1 - 2i = 0$.
   Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. On choisit z de module 1. Donner les valeurs propres de A sous forme algébrique et trigonométrique.

Planche 25. CCINP 2017

1. Montrer que pour tout couple de réels (x, y), $xy \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Montrer que si $u_n > 0$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n^2$ converge alors $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{u_n}{n}$ converge aussi.

Planche 26. CCINP

Soient Ma et Mb deux machines produisant respectivement 100 et 200 objets. La machine Ma (respectivement Mb) produit 5 (respectivement 6) d'objets défectueux. Étant donné un objet défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par la machine Ma ?

Planche 27. CCINP 2018

Soit f, de matrice $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal direct. Quelle est la nature de cette isométrie ?
2. Montrer que $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est invariant par f.
3. Montrer que w est orthogonal à $\vec{J} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Donner alors les caractéristiques de cette transformation f.

Planche 28. CCS 2018

Une urne contient N boules dont pN (avec $p \in]0, 1[$) sont blanches et $(1 - p)N$ sont noires. On tire n boules sans remise et on note X la v.a.r représentant le nombre de boules blanches tirées. Écrire $P(X = k)$ à l'aide de coefficients binomiaux et calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} P(X = k)$. Quelle loi reconnait-on ?

Planche 29. CCS 2018

On donne $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Calculer A_n^k pour tout entier k.

Planche 30. CCINP 2019

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2)$$

et $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est régulière en tout point.
2. Soit $M_1 = (3, 0, 0)$. Trouver une équation cartésienne au plan tangent à $\mathcal{S}$ passant par M_1.

Planche 31. CCINP 2019

Étudier (et tracer) la courbe paramétrée par $x(t) = t^2 - t$ et $y(t) = t^4 - t^2$.

Planche 32. CCS 2018

Déterminer deux solutions particulières (non nulles) développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E) :\ y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0.$$

En déduire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E(\mathbb{R})$ de (E).