Devoir surveillé 01. TSI2

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Samedi 02 octobre 2021

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

On pose

$$Q = X^9 - 7X^3 + 6 \text{ et } P = X^3 - 7X + 6.$$

1. Vérifier que 1 est une racine évidente de P. En déduire les autres racines de P.
2. Écrire la factorisation en polynômes irréductibles de P.
3. En déduire les racines complexes de Q. (On pourra les écrire en utilisant $j = e^{i2\pi/3}$ et $j^2 = e^{i4\pi/3}$.)
4. Écrire la factorisation en polynômes complexes irréductibles du premier degré de Q.
5. Calculer $1 + j + j^2$.
6. Donner par deux méthodes la somme des racines de Q.

EXERCICE 02

On définit la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(x + 2 - \frac{1}{x}\right) \arctan x.$$

1. f possède-t-elle un prolongement par continuité en 0 ? Ce prolongement est-il dérivable en 0 ? Quelle est sa valeur, dans l'affirmative ?
2. Écrire $f'(x)$ (dérivée de f) sous la forme $\dfrac{x^2+1}{x^2} g(x)$, où $g(x)$ est une fonction que l'on explicitera.
3. Calculer la dérivée de g et étudier le signe de cette dérivée.
   Démontrer l'existence d'un unique réel strictement négatif α qui annule g sur $\mathbb{R}_-^\star$.
4. En déduire le tableau de variations de f et les limites de f.

EXERCICE 03

Soit $u = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)$ et $v = 1 - i$.

1. Écrire u et v sous forme trigonométrique.
2. En déduire u/v sous forme trigonométrique.
3. Écrire de même u/v sous forme algébrique. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 04

1. Déterminer les DL au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $e^{\sin x}$ et de $\tan x$.
2. Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}.$$

EXERCICE 05

Soit f une fonction **continue et non nulle** de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que f est paire. Montrer aussi que $f(0) \in \{0,1\}$ et que nécessairement $f(0) = 1$.
2. On suppose que f s'annule en un point $x = a$.
   Montrer que $f\left(\dfrac{a}{(\sqrt{2})^n}\right) = 0$ pour tout entier n. En déduire que f ne s'annule pas.
3. Montrer que l'on peut définir une fonction g continue sur $\mathbf{R}^+$ par la relation : $g(x) = \ln(f(\sqrt{x}))$.
4. Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}_+^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
5. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $g(nx) = ng(x)$ puis que pour tout $r \in \mathbf{Q}_+$, $g(r) = rg(1)$.
6. On rappelle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, il existe une suite $(r_n)_n \in \mathbf{Q}_+^{\mathbf{N}}$ dont la limite est x.
   En déduire alors la forme de g puis celle de f.