Correction DS01

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

1. 1 est une racine évidente de P car $P(1)=0$. Puis on pose :

$$P=(X-1)(X^2+aX-6)=X^3+(a-1)X^2-(6+a)X+6 \Rightarrow a=1.$$

Alors $P=(X-1)(X^2+X-6)$ et rapidement on trouve que les racines de X^2+X-6 sont -3 et 2. Les racines de P sont $-3, 1$ et 2.

2. Alors $P=(X-1)(X-2)(X+3)$.

Comme $Q=P(X^3)$, les racines de Q sont celles de X^3-1, de X^3-2 et celles de X^3+3. Donc les racines de Q sont 1, j, j^2, puis $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{1}{3}}j$, $2^{\frac{1}{3}}j^2$ puis $-3^{\frac{1}{3}}$, $-3^{\frac{1}{3}}j$ et $-3^{\frac{1}{3}}j^2$.

4. $Q=(X-1)(X-j)(X-j^2)(X-2^{\frac{1}{3}})(X-2^{\frac{1}{3}}j)(X-2^{\frac{1}{3}}j^2)(X+3^{\frac{1}{3}})(X+3^{\frac{1}{3}}j)(X+3^{\frac{1}{3}}j^2)$.

5. Rapidement $1+j+j^2=0$.

6. Directement, la somme des racines est :

$$1+j+j^2+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}j+2^{\frac{1}{3}}j^2-3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}j-3^{\frac{1}{3}}j^2=0.$$

Sinon, la somme des racines est aussi le coefficient devant X^8 dans Q donc vaut 0.

EXERCICE 02

1. On définit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\left(x+2-\dfrac{1}{x}\right)\arctan x$ sur $\mathbf{R}^\star$. Comme $\arctan x = x+o(x)$,

$$f(x)=\left(x+2-\frac{1}{x}\right)(x+o(x))=-1+0(1),$$

au voisinage de $x=0$. Et donc f possède un prolongement par continuité en 0 qui est $f(0)=-1$.

Par ailleurs, posons $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et effectuons un DL au voisinage de $x=0$.

$$t(x)=\frac{1}{x}\left(1+\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right),$$

en poussant le DL de arctan à l'ordre 3. Ce qui donne :

$$t(x)=2+o(1).$$

Ce prolongement est donc dérivable en 0 de valeur $f'(0)=2$.

2. En dérivant f comme produit de deux fonctions, pour tout x non nul,

$$f'(x)=\frac{x^2+1}{x^2}\left(\arctan x+\frac{x(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}\right).$$

On pose donc : $g(x)=\arctan x+\dfrac{x(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

3. On a pour tout x, $g'(x)=-\dfrac{4x(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^3}$. Or $x^2-2x-1=0$ a pour solutions $x_1=1-\sqrt{2}$ et $x_2=1+\sqrt{2}$. Alors $g'(x)>0$ pour $x\in]-\infty, x_1]$ puis sur $[0,x_2]$ et négative sur $[x_1,0]$ et sur $[x_2,+\infty[$.
Alors g est strictement croissante sur $]-\infty, x_1]$ et a pour limite $-\pi/2$ en $-\infty$. Comme g est strictement décroissante sur $[x_1,0]$ et comme $g(0)=0$, $g(x_1)>0$. Il existe donc un unique réel strictement négatif α qui annule g sur $\mathbb{R}_-^\star$.

Enfin, on peut remarquer que comme g est strictement croissante sur $[0,x_2]$ puis décroit sur $[x_2,+\infty[$ et a pour limite $\pi/2$ en $+\infty$, g est à valeurs positives à partir de α.

4. On a vu à **3** que g est négative sur $]-\infty,\alpha]$ et positive sur $[\alpha,+\infty[$. Donc comme $\dfrac{x^2+1}{x^2}>0$, le signe de f' est celui de g. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

EXERCICE 03

1. • Soit $u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)$, alors $|u|^2 = \frac{1}{2^2}\left((\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2\right) = 2 \Rightarrow |u| = \sqrt{2}$. Alors :

$$u = \sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

On trouve :

$$u = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

• $v = 1 - i \Rightarrow |v| = \sqrt{2}$ et

$$v = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

2. Alors :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

3. • Ecrivons u/v sous forme algébrique.

$$\frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)}{1 - i} = \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)(1 + i)}{|1 - i|^2} = \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\right).$$

• On peut en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

EXERCICE 04

1. • Effectuons le DL à l'ordre 3 *de* $e^{\sin x}$.

$$e^{\sin x} = \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3).$$

On développe les puissances et tout ce qui est supérieur au degré 3 est à faire disparaitre (discrétement) dans les fondations d'un immeuble en construction. Il reste :

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

• Déterminons le DL de $\tan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right).$$

On développe aussi.

$$\tan x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. Déterminons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$.
On use des DL trouvés en **1.**

$$\frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}.$$

Ce qui donne :

$$\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-\tan x}=\frac{\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)}=\frac{1}{3}+o(1).$$

Et finalement,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-\tan x}=\frac{1}{3}.$$

EXERCICE 05

Soit f une fonction **continue et non nulle** de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2,\ f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f(x)f(y).$$

1. • Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe x_0 tel que $f(x_0)\neq 0$. Puis, pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$f(x)f(x_0)=f\left(\sqrt{x^2+x_0^2}\right)=f\left(\sqrt{(-x)^2+x_0^2}\right)=f(-x)f(x_0).$$

Et en divisant par x_0, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=f(-x)$. La fonction f est paire.
• En appliquant avec $x=y=0$, $f\left(\sqrt{0^2+0^2}\right)=f(0)=f(0)f(0)$. Donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.
Si $f(0)=0$, alors pour tout $x\in\mathbf{R}_+$, $f\left(\sqrt{x^2+0^2}\right)=f(x)=f(x)f(0)=0$. Donc f serait nulle sur $\mathbf{R}_+$ et donc sur $\mathbf{R}$ par parité, impossible. Donc $f(0)=1$.
2. • On suppose que f s'annule en un point $x=a$.
Prenons $a>0$ par parité. Alors :

$$f\left(\frac{a}{(\sqrt{2})^n}\right)f\left(\frac{a}{(\sqrt{2})^n}\right)=f\left(\sqrt{\frac{a^2}{2^n}+\frac{a^2}{2^n}}\right)=f\left(\frac{a}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right).$$

En prenant $n=1$, on a :

$$f\left(\frac{a}{(\sqrt{2})}\right)f\left(\frac{a}{(\sqrt{2})}\right)=f\left(a\right)=0.$$

Et donc $f\left(\dfrac{a}{(\sqrt{2})}\right)=0$. Puis on applique avec $n=2$ et on a : $f\left(\dfrac{a}{(\sqrt{2})^2}\right)=0$. Ainsi de suite, pour tout n entier, $f\left(\dfrac{a}{(\sqrt{2})^n}\right)=0$.
• Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{(\sqrt{2})^n}=0$, par contuinité de f, on aboutit à $f(0)=0$. ABSURDE. Donc l'hypothèse : « f s'annule en a » est fausse et donc f **ne s'annule en aucun point**.
3. Comme $f(0)=1>0$ et comme f est continue, f est à valeurs strictement positives et l'on peut définir une fonction g continue sur $\mathbf{R}^+$ par la relation : $g(x)=\ln(f(\sqrt{x}))$.
4. Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}_+^2$,

$$g(x+y)=\ln(f(\sqrt{x+y}))=\ln\left(f\left(\sqrt{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}\right)\right)=\ln\left(f(\sqrt{x})f(\sqrt{y})\right)$$

$$=\ln\left(f(\sqrt{x})\right)+\ln\left(f(\sqrt{y})\right)=g(x)+g(y).$$

5. • Montrons que pour tout $x\in\mathbf{R}_+$ et tout $n\in\mathbf{N}$, $g(nx)=ng(x)$.
En prenant $y=0$, on a : $g(0)=0$. Puis supposons $g(nx)=ng(x)$ pour x fixé et n fixé dans $\mathbf{N}$. Alors :

$$g((n+1)x)=g(nx+x)=g(nx)+g(x)=(n+1)g(x).$$

- Montrons que pour tout $r \in \mathbf{Q}_+$, $g(r) = rg(1)$.

Posons $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^\star$.

$$qg(r) = qg\left(\frac{p}{q}\right) = g(p),$$

en posant $n = q$ et $x = \dfrac{p}{q}$. Alors :

$$g(r) = \frac{1}{q}g(p) = \frac{p}{q}g(1) = rg(1).$$

6. On rappelle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, il existe une suite $(r_n)_n \in \mathbf{Q}_+^{\mathbf{N}}$ dont la limite est x. Alors :

$$g(x) = g\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) = \lim_{n\to+\infty} g(r_n) = \lim_{n\to+\infty} r_n g(1) = xg(1),$$

en utilisant la continuité de g en tout point. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $g(x) = \lambda x$, en posant $\lambda = g(1)$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\exp(g(x)) = e^{\lambda x} = f(\sqrt{x})$.
Posons $t = \sqrt{x}$ et alors $t^2 = x$ et $f(t) = e^{\lambda t^2}$. Réciproquement, toutes ces fonctions conviennent.