Devoir surveillé N°02

KORREKTUR

Exercice 01

1. On a : $\phi(x^3) = (X+2)X^3 - X(X+1)^3 = -X^3 - 3X^2 - X$ et $\phi(1) = X + 2 - X.1 = 2$.

2. Pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbf{R}_n[X]$, $\phi(aP+bQ)$ vaut

$$(X+2)(aP+bQ) - X((aP+bQ)(X+1)) = a(X+2)P - aXP(X+1) + b(X+2)P - bXP(X+1) = a\phi(P) + b\phi(Q).$$

3. Pour tout $k \geqslant 1$, $\phi(X^k) = (X+2)X^k - X(X+1)^k$.
Comme $(X+1)^k = X^k + kX^{k-1} + ...$ donc : $X(X+1)^k = X^{k+1} + kX^K + ...$ et comme $(X+2)X^k = X^{k+1} + 2X^k$, on voit que

$$\phi(X^k) = (2-k)X^k + Q_k$$

où $Q_k \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$. Le coefficient dominant de $\phi(X^k)$ est $2-k$ et son degré k sauf si $k=2$.
Dans ce cas, $\phi(X^2) = -X$ et le coefficient dominant est alors -1 et le degré 1. Et enfin, pour $k=0$, comme $\phi(1) = 2$, le coefficient dominant est 2 et le degré est 0.

4. ϕ est linéaire et n'augmente pas le degré donc si $P \in \mathbf{R}_n[X]$ alors $\phi(P) \in \mathbf{R}_n[X]$, et ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

5-a Comme $\phi(1) = 2$, $\phi(X) = X$, $\phi(X^2) = -X$ et $\phi(X^3) = -X - 3X^3 - X^3$, on a bien M, colonne par colonne.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5-b $Q = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t & 3 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}.$

Et en continuant, $Q(t) = (t+1)t(t-1)(t-2)$. Les valeurs propres de M sont $-1, 0, 1, 2$.

5-c ϕ est diagonalisable car possède 4 valeurs propres réelles distinctes en dimension 4.

En lisant M, on a immédiatement : $E_2(M) = \mathsf{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$, soit $E_2(\phi) = \mathsf{Vect}\left(\{1\}\right)$.

De même, $E_1(M) = \mathsf{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$, soit $E_1(\phi) = \mathsf{Vect}\left(\{X\}\right)$.

Pour la valeur propre 0, on peut remarquer que C_2 et C_3 de M sont opposées donc $\phi(X + X^2) = 0$. Et comme $E_0(\phi)$ est de dimension 1, on a le résultat.

$E_0(M) = \mathsf{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$, soit $E_0(\phi) = \mathsf{Vect}\left(\{X + X^2\}\right)$.

Enfin, pour la valeur propre -1, on résout $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix}$.

On a le système : $\left\{\begin{array}{ccc} 2x & = & -x \\ y - z - t & = & -y \\ -3t & = & -z \\ -t & = & -t \end{array}\right. \Rightarrow y = 2t$ et $z = 3t$.

Il reste : $E_{-1}(M) = \mathsf{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$, soit $E_{-1}(\phi) = \mathsf{Vect}\left(\{2X + 3X^2 + X^3\}\right)$.

Exercice 02

1. Methode 01

D'après la formule du binôme de Newton, $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Methode 02

On sait que $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans E, ensemble à n éléments. Alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, c'est compter toutes les parties de E à 0 élément puis à 1 élément puis à 2 éléments, etc. et les ajouter, c'est donc compter toutes les parties de E et c'est aussi 2^n.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

On sait que $\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1$ car P est une probabilité. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha \binom{n}{i}\binom{n}{j} = \alpha \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}.$$

Et avec **1)**, on a :

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1 \Rightarrow \alpha 2^n 2^n = 1 \Rightarrow \alpha = 4^{-n}.$$

3. • Loi de X

On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet $([Y = j])_{j \in [\![1, n+1]\!]}$.
Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$ fixé,

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=1}^{n+1} 4^{-n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

$$= 4^{-n}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} = 4^{-n}\binom{n}{i-1}2^n = 2^{-n}\binom{n}{i-1}.$$

• Loi de Y

De même, pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$ fixé, $P(Y = j) = 2^{-n}\binom{n}{j-1}$.

• Independance ?

Pour tout couple $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 4^{-n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = 2^{-n}\binom{n}{i-1}2^{-n}\binom{n}{j-1} = P(X = i)P(Y = j).$$

Les v.a.r X et Y sont bien indépendantes.

4. Déjà, $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Puis, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(Z = k) = P(X = k+1) = 2^{-n}\binom{n}{k}.$$

On reconnait la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ car $P(Z = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$.

Alors :

$$E(Z) = \frac{n}{2} \text{ et } V(Z) = \frac{n}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}.$$

5. Prenons la patate A et coupant là en deux compartiments A_1 et A_2 où A_1 possède p éléments et A_2 les q restants.
Alors $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = A$.
Si $k \in [\![0, r]\!]$ fixé, le nombre de parties de A de cardinal r et comportant exactement k éléments de A_1 (et donc $r-k$ de A_2) est égal à $\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$.
Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ est le nombre total de parties à r éléments, k allant de 0 à r, ce qui donne aussi $\binom{p+q}{r}$. Et donc :

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$

6. On peut en déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ en appliquant avec $p = q = r = n$.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

On a aussi usé de : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

7-a On remarque que les $n+1$ colonnes de B sont non nulles et proportionnelles à C_1.
En effet,

$$C_2 = \binom{n}{1}C_1, \text{ puis } C_j = \binom{n}{j-1}C_1 \text{ jusqu'à } C_{n+1} = \binom{n}{n}C_1.$$

En conclusion, le rang de B est 1.

7-b La trace de B est :

$$\mathrm{tr}\,(B) = \sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i]) = 4^{-n}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}^2 = 4^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = 4^{-n}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 03

1. On pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$.

Alors : $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X_n$.

2. On a $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 2 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^3 - 2t^2 - t + 2$. Puis 1 et -1 sont racines triviales.
On trouve 2 pour ultime racine. Bref, A a trois racines distinctes et réelles en dimension 3 donc est diagonalisable.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & -x \\ z & = & -y \\ -2x+y+2z & = & -z \end{array}\right. \Leftrightarrow E_{-1}(A) = \mathsf{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & x \\ z & = & y \\ -2x+y+2z & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow E_{1}(A) = \mathsf{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x \\ z & = & 2y \\ -2x+y+2z & = 2z & \end{array} \right. \Leftrightarrow E_2(A) = \mathsf{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et si $D = \mathrm{Diag}\,(-1,1,2)$, on a : $D = P^{-1}AP$.

3. $Y_0 = P^{-1}X_0 \Leftrightarrow PY_0 = X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a+b+c & = & 1 \\ -a+b+2c & = & -1 \\ a+b+4c & = & 1 \end{array} \right.$.

On trouve après un calcul (in)supportable, $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$. Donc : $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}AX_n \Leftrightarrow Y_{n+1} = P^{-1}APY_n = DY_n.$$

Donc, $Y_n = D^nY_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \\ (-1)^n \end{pmatrix}$, on trouve $u_n = (-1)^n$.