Devoir surveillé N°02

2TSI-MATHÉMATIQUES

Samedi 27 Novembre 2021

Les différents exercices sont indépendants.

Exercice 01

Tiré de CCP TSI

Soit n un entier naturel ou égal à 3.
Soit $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application ϕ, qui à un polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$ associe :

$$\phi(P) = (X+2)P - XP(X+1).$$

Par exemple, $\phi(X) = (X+2)X - X(X+1) = X$.

1. Vérifier que $\phi(X^3) = -X - 3X^2 - X^3$ et $\phi(1) = 2$.
2. Montrer que ϕ est linéaire.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
4. En déduire que ϕ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
5. **Dans cette question, on considère le cas $n = 3$.**
   On note M la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbf{R}_3[X]$ et Q le polynôme caractéristique de ϕ, c'est-à-dire $Q(t) = \mathsf{Det}\,(tI_4 - M)$, où I_4 désigne la matrice unité carrée d'ordre 4.
   (a) Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer Q. Quelles sont les valeurs propres de ϕ ?
   (c) ϕ est-il diagonalisable ? Déterminer les sous-espaces propres de ϕ.

Exercice 02

On rappelle que pour deux entiers naturels r et l, $\binom{r}{l}$ désigne le nombre de parties à l éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Déterminer la valeur du réel α.

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p+q$.
En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k+(r-k)=r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

7. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$b_{i,j} = \mathbb{P}([(X,Y)=(i,j)]).$$

(a) Déterminer le rang de la matrice B.

(b) Déterminer la valeur de $\mathrm{Tr}(B)$, la trace de la matrice B.

Exercice 03

D'après CCS TSI

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 1$$

et la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2}.$$

1. On pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Réduire A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On déterminera une matrice de passage P correspondante.
(***On développera les calculs sur sa copie***.)
On pose $Y_n = P^{-1}X_n$.

3. Déterminer Y_0 puis ensuite Y_n en fonction de n.

4. En déduire X_n puis u_n en fonction de n.