Devoir libre 04

2TSI. Mathématiques

À rendre le 03 Janvier 2022 au plus tard

L'exercice et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice (avec Python)

Posé à l'oral de CCS en Maths II en 2017

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définis par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = 2X \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

1. Avec Python, calculer P_n pour n variant de 2 à 8.
2. Conjecturer le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n. Justifier ces résultats.
3. On pose : $\langle P,\, Q\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt$, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.
   (a) Calculer à la main $\langle P_0,\, P_0\rangle$, $\langle P_0,\, P_1\rangle$ et $\langle P_1,\, P_1\rangle$.
   (b) Rappeler la méthode des trapézes pour déterminer numériquement une intégrale définie. Proposer un programme en langage Python.
   (c) Avec la procédure Python écrite à la question précédente, calculer $\langle P_i,\, P_j\rangle$ pour i et j variant de 0 à 8. Que remarque t-on ?

Problème

Posé au Concours National Marocain, filière TSI

On note $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbf{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on considère la fonction ϕ_t définie sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \phi_t(x) = \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}.$$

De plus, on considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\phi_t(x)\,dt$.

Partie A

Cette partie est le calcul de la somme de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

1. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}$.
2. Soit $x \in]0,\pi]$.
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $e^{ix}\dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
3. Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que
$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\pi}\Psi(x)\sin(mx)\,dx = 0.$$

T.S.V.P →

4. Soit g définie sur $[0,\pi]$ par : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \in]0,\pi] \\ \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)dx$.

6. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Partie B

1. Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbf{R}$. Étudier la parité de f.
2. On désire étudier la continuité de f.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, ϕ_t est dérivable (par rapport à x) sur $\mathbf{R}_+$ et que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t}$.
   (b) En déduire : $\forall (t,x) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\forall h \in \mathbf{R}^\star$ avec $x+h \geqslant 0$, $\displaystyle\left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right| \leqslant |h|te^{-t}$.
   (c) En déduire que f est continue sur $\mathbf{R}$.
3. Déterminer la monotonie de f sur $\mathbf{R}$.
4. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du$.

   Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. On étudie la nature de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star$, $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan(\sqrt{x}) \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du \leqslant \arctan(\sqrt{x})$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star$, $0 \leqslant \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du \leqslant \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})$.
   (d) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du$.
   (e) Donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.
   (f) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.

Partie C

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_0^n f(t)\,dt$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ est une série divergente.
   (c) En déduire que S_n est équivalente à $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_1(n^2x)\,dx$.

   Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente et calculer sa valeur.