Croissance pilotée par la diffusion : une approche physique de la notion de fractale

Positionnement thématique

Physique Théorique, *Physique de la Matière*, *Informatique Pratique*, *Chimie Organique.*

Mots-clés

Mots-clés (en français)	**Mots-clés** (en anglais)
Diffusion	*Diffusion*
Marche aléatoire	*Random walk*
Croissance dendritique	*Dendritic growth*
Dimension fractale	*Fractal dimension*
Physique numérique	*Computational physics*

Bibliographie commentée

La physique s'intéresse aux lois fondamentales, celles qui régissent la chute des corps (la gravitation), le comportement de la matière à très petite échelle (la mécanique quantique), etc, mais elle investit également les comportements collectifs, qui se déduisent bien sûr des lois fondamentales, mais qui procèdent de mécanismes complexes qui font souvent émerger des schémas inattendus. On parlera souvent, pour simplifier, de physique fondamentale quand il s'agira de comprendre le comportement d'un électron dans un accélérateur à particules, et de physique des systèmes complexes quand on s'attachera à interpréter les avalanches de sable sur une barkhane (dune en forme de croissant allongé dans le sens du vent). Dans ce travail, je m'intéresse au point de vue des systèmes complexes et plus précisément à la notion de croissance et de morphologie. Cette question apparemment simple de la forme d'un objet ou d'une surface qui évolue au cours du temps est un domaine extrêmement riche comme en témoigne la récente médaille Fields (2014) attribuée à Martin Haier[2], mathématicien autrichien, et qui concerne son étude de l'équation dite de Kardar-Parisi-Zhang[1], équation soupçonnée de décrire de très nombreux phénomènes de croissance des surfaces.

Nous nous concentrerons en particulier sur la notion de forme fractale, et plus précisément sur celle d'arborescence. Cette notion de fractale, introduite par Benoît Mandelbrot[3] en 1973 et développée un an plus tard dans un ouvrage[4] qui fait depuis référence, fait appel à un nouveau type de géométrie où la structure est invariante par changement d'échelle. Dans notre travail, nous nous restreignons à une classe particulière d'objets, les arborescences, qui, comme leur nom l'indique, possèdent une géométrie analogue à celle des arbres, à la différence près que les ramifications peuvent formellement se faire à des profondeurs infinies.

La nature, comme les réalisations expérimentales contrôlées en laboratoire, fournissent de nombreux exemples de telles structures et la question est vite apparue de modéliser ces géométries atypiques, en essayant de comprendre le rôle des différents paramètres en jeu. Ces systèmes sont générés par des processus complexes, distincts (dendrite végétale, neurone de la rétine, réseau des affluents d'une rivière, dépôt électrolytique sous champ magnétique, etc), et il importe fondamentalement de comprendre en quoi ils peuvent conduire à des formes similaires. Dans son livre, *Universalités et fractales : jeux d'enfants ou délits d'initié ?*, Bernard Sapoval[5] invoque cette notion d'universalité en observant ces similarités morphologiques : indépendamment des processus, tous différents, qui pilotent ces phénomènes physiques, les formes obtenues se ressemblent. Et c'est précisément pour essayer de reproduire les observations expérimentales qu'en 1981, Witten et Sander[8, 7] introduisent un modèle numérique de croissance, le modèle DLA (Diffusion Limited Aggregation), dont l'objet d'étude est l'agrégation de particules métalliques. Ces auteurs remarquent immédiatement que ce modèle est un cas limite de croissance dendritique (qui sera la partie expérimentale de mon projet). Ce modèle a connu un très grand succès (cité plus de 5000 fois [8]) en raison de sa simplicité d'implémentation (qui constituera la partie simulation numérique de mon projet) et sa faculté à reproduire les caractéristiques essentielles des croissances naturelles ou de laboratoire. Le coeur algorithmique de ce modèle est celui de la marche aléatoire[6], que je relierai à la diffusion (partie modélisation de mon projet), et il nous permettra de construire des formes dont nous analyserons la dimension, dite fractale, puis de quantifier comment la matière, dans ces morphologies, occupe l'espace. Sur la base des propriétés attendues de ce modèle, je mettrai en vis-à-vis les résultats expérimentaux et les simulations numériques afin de caractériser la dimension, fractale ou euclidienne, des échantillons, qui correspondront à une croissance bactérienne sur des plaques d'agar.

Problématique retenue

Les paramètres d'une diffusion dans le plan sont essentiels pour interpréter les géométries obtenues expérimentalement. Il s'agit de comprendre comment le caractère fractal des morphologies dépend, aussi bien du point de vue théorique qu'expérimental, de ces paramètres et s'il est possible de les manipuler de manière efficace.

Objectifs du TIPE

1. Modélisation : je ferai le lien entre diffusion et marche aléatoire, en montrant dans le cas unidimensionnel qu'en prenant la limite du milieu continu, le problème du dénombrement d'un grand nombre de marches discrètes est bien décrit par une équation aux dérivées partielles identique à celle de la diffusion de la chaleur.
2. Simulation numérique : j'implémenterai l'algorithme DLA en C++ par souci d'efficacité et utiliserai des bibliothèques graphiques pour la visualisation.
3. Croissance bactérienne : je ferai croître des colonies bactériennes sur de l'agar (gélose) afin d'étudier l'organisation dendritique du point de vue expérimental.

Références bibliographiques

[1] Ivan Corwin : Kardar-Parisi-Zhang Universality. `http://www.ams.org/journals/notices/201603/rnoti-p230.pdf`. Je n'ai pas spécifiquement travaillé sur cette équation, bien au-delà de mes connaissances. Site consulté en septembre 2016.

[2] M. Hairer : `http://www.mathunion.org/general/prizes/fields/prizewinners/`. Le site personnel de Martin Hairer : `http://www.hairer.org`. Site consulté en septembre 2016.

[3] Benoît Mandelbrot : Formes nouvelles du hasard dans les sciences. *Économie appliquée*, 26:307–319, 1973.

[4] Benoît Mandelbrot : *Les objets fractals forme, hasard et dimension.* Champs sciences 301. Flammarion, Paris, 2010.

[5] Bernard Sapoval : *Universalités et fractales jeux d'enfant ou délits d'initié ?* Champs 466. Flammarion, Paris, 2001.

[6] Wikipedia : Marche aléatoire. `https://en.wikipedia.org/wiki/Random_Walk`. Site consulté régulièrement depuis septembre 2016.

[7] T. A. Witten et L. M. Sander : Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic543638.files/witten-sander-dla.pdf. La référence de Witten et Sander n'est pas accessible sans abonnement, mais le papier est suffisamment connu pour qu'une version pdf gratuite ait été rendue disponible en ligne par le site de Harvard. Site consulté régulièrement depuis septembre 2016.

[8] T. A. Witten et L. M. Sander : Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 47:1400 –1403, Nov 1981.