# Devoir surveillé N°03

## 2TSI-MATHÉMATIQUES

**Samedi 15 Janvier 2022**

*Les différents exercices sont indépendants.*

## Exercice 01

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ (1+4x)y'(x) - 2y(x) = 0.$$

1. Résoudre $(E)$.
2. Déterminer les solutions de $(E)$ développables en série entière.
3. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence $R$ de cette série.
   (b) Montrer que sa somme $S$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de $(E)$ sur $]-R,\, R[$.
   (c) En comparant avec les solutions trouvées à la question **1**, trouver l'expression de $S(x)$.

## Exercice 02

1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$ converge.
2. En déduire le domaine de définition de $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$ puis sa dérivée.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $F(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} - 2\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\, dt$.
   En refaisant ensuite une intégration par parties sur cette dernière intégrale, montrer :
   $$F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
   quand $x \to +\infty$.
4. Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
5. On note encore $g$ le prolongement par continuité de $g$ sur $[0,1]$. Justifier que $\displaystyle\int_x^1 g(t)\, dt$ tend vers la constante $K = \displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt$.
   Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt - (-\ln x)$ et en déduire que $F(x) \sim_{0^+} -\ln x$.

## Exercice 03

On pose $I = ]-1,1[$.

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.
2. Déterminer $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbf{R}^4$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{t^2(1-t^2)} = \dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t^2} + \dfrac{\gamma}{1-t} + \dfrac{\delta}{1+t}$.

3. On considère l'équation différentielle, définie sur $I \setminus \{0\}$, par :

$$(F) \quad Z'(t) + \frac{4t^2 - 2}{t(t^2 - 1)} Z(t) = 0.$$

   Résoudre $(F)$.

4. On considère l'équation différentielle, définie sur $I$ par :

$$(E) \ (t^2 - 1)y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = 0.$$

   (a) On pose : $\forall t \in I$, $y(t) = t\, z(t)$. Écrire l'équation différentielle $(E')$ vérifiée sur $I$ par $z$.

   (b) En utilisant la résolution de $(F)$ déterminer toutes les solutions de $(E')$ et en déduire les solutions de $(E)$.

## Exercice 04

On considère le système différentiel $(S)$ suivant : $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) + t \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 1 \end{cases}$

En posant, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $(S)$ s'écrit $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

1. Diagonaliser $A$. Écrire la matrice de passage $P$ de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à une base de vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. On choisira $\vec{u}_1$ associé à la plus grande des deux valeurs propres (donc $\lambda_1 > \lambda_2$) et on choisira pour ordonnée de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_2$ le réel 1.
2. Déterminer $P^{-1}$.
3. On appelle $\Delta$ la matrice diagonale $Diag(\lambda_1, \lambda_2)$. Quelle est la relation entre $A$, $P$ et $\Delta$ ?
4. Montrer que si l'on pose : $X(t) = P\,Y(t)$

$$(S') \ \ Y'(t) = \Delta\, Y(t) + P^{-1}B(t).$$

5. Résoudre le système différentiel $(S')$ et en déduire les solutions de $(S)$.