

Exercice 01

1. On considère l'équation différentielle : (E) $(1 + 4x)y'(x) - 2y(x) = 0$.

Rapidement, $y(x) = Ke^{\frac{1}{2} \ln(1+4x)} = K\sqrt{|1 + 4x|}$.

2. Déterminons les solutions de (E) développables en série entière.

On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. Alors :

$$(1 + 4x)y'(x) - 2y(x) = (1 + 4x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Cela donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n.$$

Ou encore :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n.$$

Et :

$$a_1 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n + 1)a_{n+1} + 4na_n - 2a_n) x^n = 0.$$

Alors pour tout $n \geq 2$, $a_n = -2 \frac{2n-3}{n} a_{n-1}$ et $a_1 = 2a_0$.

$$a_n = -2 \frac{2n-3}{n} \times -2 \frac{2n-5}{n-1} \times -2 \frac{2n-7}{n-2} \times \dots \times -2 \frac{3}{3} \times -2 \frac{1}{2} \times 2a_0.$$

Soit : $a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{n!} (2n-3)(2n-5)\dots 1 \times 2a_0 \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 2}{(2n-2)(2n-4)\dots 2}$.

Ou encore : $a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{n!} \frac{(2n-2)! 2a_0}{2^{n-1} n!(n-1)! (2n)(2n-1)} = \frac{(2n)! (-1)^{n-1}}{(n)!^2 (2n-1)} a_0$.

On remarque que pour $n = 1$, on a bien $a_1 = 2a_0$. On en déduit que les solutions de (E) développables en série entière forme une droite vectorielle de base :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)! (-1)^{n-1}}{(n)!^2 (2n-1)} x^n.$$

Son rayon est déterminé plus loin.

3-a On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n$. On pose u_n le terme général de la série.

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} (2n+2)!}{(2n+1)[(n+1)!]^2} \times \frac{(2n-1)(n!)^2}{(-1)^n (2n)!} \right| |x| = \left| \frac{2(2n-1)}{n+1} \right| |x|.$$

Cette quantité tend vers $4|x|$ quand n tend vers $+\infty$.

Donc si $4|x| < 1$, la série converge et si $4|x| > 1$, la série diverge. Le rayon est $R = \frac{1}{4}$.

3-b S est une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) d'après **2**.

3-c En comparant avec les solutions trouvées à la question **1**, on peut trouver l'expression de $S(x)$. En effet, comme $S(0) = -1$, $K = -1$ et $S(x) = -\sqrt{1 + 4x}$.

Remarque :

On peut remonter que S est bien solution de (E) en procédant à l'envers.

On travaille pour $x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$. Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n$.

On sait que y est dérivable et que l'on peut dériver sous le signe \sum à l'intérieur du domaine de convergence.

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n (2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)(2n+2)!}{(2n+1)[(n+1)!]^2} x^n.$$

Puis la quantité $(1 + 4x)y'(x) - 2y(x)$ vaut : (On regroupe tous les termes en x^n pour tout $n \geq 1$.)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(2n+2)!}{(2n+1)[(n+1)!]^2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n n(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n (2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n.$$

Il reste : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} \left[-2 + \frac{4n-2}{2n-1} \right] x^n + (-1)2! + 2 = 0.$

Donc on a : $(E) (1+4x)y'(x) - 2y(x) = 0.$

Exercice 02

1. Montrons que pour $a > 0$ fixé, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ converge.

Comme $\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, (On utilise classiquement un théorème de comparaison et le fait que $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, où $a > 0$.) $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue (donc par morceaux) sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ fixé et est donc intégrable sur $[a, +\infty[$, pour $a > 0$.

2. • Pour $x = 0$, $f(t) \sim \frac{1}{t}$, et comme l'intégrale sur $]0, 1]$ de cette dernière fonction diverge, il en est de même de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$. On en déduit que F n'est pas définie en 0 et par extension ne peut pas être définie pour $x < 0$.

Donc : $D_F =]0, +\infty[$.

• Pour $x > 0$, $F(x) = \int_1^{+\infty} f(t) dt - \int_1^x f(t) dt$.

L'application $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur D_F (car f est continue sur cet ensemble). Donc :

$$\forall x > 0, F'(x) = -f(x) = -\frac{\sin x}{x^2}.$$

3. • Montrons à l'aide d'une intégration par parties, que $F(x) = \frac{\cos x}{x^2} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3} dt$.

Soit $u > x > 0$:

$$\int_x^u \frac{\sin t}{t^2} dt = \left[-\frac{\cos t}{t^2} \right]_x^u - 2 \int_x^u \frac{\cos t}{t^3} dt.$$

Le but du jeu est d'augmenter le degré du dénominateur dans l'intégrale.

Puis u tend vers $+\infty$: $F(x) = \frac{\cos x}{x^2} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3} dt$.

• En refaisant ensuite une intégration par parties sur cette dernière intégrale, montrons :

$$F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

quand $x \rightarrow +\infty$.

Il faut montrer que l'intégrale du second membre est $o(1/x^2)$. Croyez moi si vous voulez mais la majoration directe est trop forte. Il faut refaire une *I.P.P.* Une nouvelle *I.P.P.* monte encore le degré du dénominateur et c'est ce que l'on veut !

On a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3} dt = -\frac{\sin x}{x^3} + 3 \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4} dt.$$

On majore en valeur absolue la dernière intégrale par $\int_x^{+\infty} 3t^{-4} dt = x^{-3}$.

Le second membre de la nouvelle égalité est bien un $o(1/x^2)$.

4. Montrons que la fonction $g : t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.

La fonction g est bien continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 car $g(t) = -\frac{t}{6} + o(t)$.

5. • On note encore g le prolongement par continuité de g sur $[0, 1]$. On peut justifier que $\int_x^1 g(t) dt$ tend

vers la constante $K = \int_0^1 g(t) dt$ car g est continue sur $[0, 1]$. Et donc $\int_x^1 g(t) dt$ tend vers la constante $K = \int_0^1 g(t) dt$.

- Déterminons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2} dt - (-\ln x)$.

On a :

$$\int_x^1 g(t) dt = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2} dt - \int_x^1 \frac{dt}{t} = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2} dt - (-\ln x).$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2} dt - (-\ln x) = K$.

Ainsi, $F(x) - \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - (-\ln x)$ tend vers K quand $x \rightarrow 0^+$ et en divisant par $-\ln x$, le rapport $\frac{F(x)}{(-\ln x)}$ tend vers 1 lorsque $x \rightarrow 0^+$ et $F(x) \sim -\ln x$.

Exercice 03

1. On pose $I =]-1, 1[$. Déterminons $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\frac{2-4t^2}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$.

Déterminons $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ en posant $F(t) = \frac{2-4t^2}{t(t^2-1)}$

$$a = [F(t)t]_{t=0} = \left[\frac{2-4t^2}{t^2-1} \right]_{t=0} = -2, \quad b = [F(t)(t-1)]_{t=1} = \left[\frac{2-4t^2}{t(t+1)} \right]_{t=0} = -1.$$

$$\text{Et enfin : } c = [F(t)(t+1)]_{t=-1} = \left[\frac{2-4t^2}{t(t-1)} \right]_{t=-1} = -1.$$

2. Déterminons $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^4$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\gamma}{1-t} + \frac{\delta}{1+t}$.

On pose :

$$H(t) = \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\gamma}{1-t} + \frac{\delta}{1+t}.$$

On a : $\beta = [t^2 H(t)]_{t=0} = \left[\frac{1}{1-t^2} \right]_{t=0} = 1$ puis $\gamma = [H(t)(1-t)]_{t=1} = \left[\frac{1}{t^2(1+t)} \right]_{t=1} = \frac{1}{2}$
 puis $\delta = [H(t)(1+t)]_{t=-1} = \left[\frac{1}{t^2(1-t)} \right]_{t=-1} = \frac{1}{2}$ et enfin $\lim_{t \rightarrow +\infty} tH(t) = 0 = \alpha - \gamma + \delta \Rightarrow \alpha = 0$.

3. On considère l'équation différentielle, définie sur $I \setminus \{0\}$, par :

$$(F) \quad Z'(t) + \frac{4t^2-2}{t(t^2-1)} Z(t) = 0.$$

On cherche une primitive de $t \mapsto \frac{2-4t^2}{t(t^2-1)}$.

Il est temps d'utiliser notre décomposition en éléments simples. On cherche donc une primitive de :

$$t \mapsto \frac{-2}{t} + \frac{-1}{t-1} + \frac{-1}{t+1}.$$

Rapidement, on trouve $t \mapsto \ln \left| \frac{1}{t^2(t^2-1)} \right|$ pour $t \in I \setminus \{0\}$. Et les solutions Z de (F) sont :

$$t \mapsto \lambda \exp \left(\ln \left| \frac{1}{t^2(t^2-1)} \right| \right) = \lambda \left| \frac{1}{t^2(t^2-1)} \right| = \frac{\lambda}{t^2(1-t^2)}.$$

4-a On pose : $\forall t \in I$, $y(t) = tz(t)$.

On a, pour tout $t \in I$, $y'(t) = z(t) + tz'(t)$ et $y''(t) = 2z'(t) + tz''(t)$.

On remplace dans (E) comme indiqué dans la **méthode ??**. On obtient :

$$(t^2 - 1)(2z'(t) + tz''(t)) + 2t(z(t) + tz'(t)) - 2tz(t) = 0.$$

Ce qui donne : $t(t^2 - 1)z''(t) + (4t^2 - 2)z'(t) = 0$.

4-b Si l'on pose $z'(t) = Z(t)$, (E) est ramené à (F) que l'on a résout à **3**. Ici $Z(t) = \frac{K}{t^2(1-t^2)}$. Il reste à intégrer Z . Pour cela, on utilise la décomposition en éléments simples de **2**.

Pour tout $t \in I \setminus \{0\}$, $Z(t) = \frac{\lambda}{t^2} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$.

Et donc :

$$\forall t \in I \setminus \{0\}, z : t \mapsto -\frac{\lambda}{t} + \frac{\lambda}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) + \mu, \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Il reste à multiplier par t : $\forall t \in I \setminus \{0\}, y : t \mapsto -\lambda + \frac{\lambda}{2} t \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) + \mu t$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

On peut remarquer que y est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = -\lambda$.

On pose $y(0) = -\lambda$ et on note toujours y ce prolongement. La fonction y est de classe C^∞ sur I . On a ainsi l'ensemble $\mathcal{S}_E(]-1, 1[)$ des solutions de (E) sur $I =]-1, 1[$ qui forme un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\left(t \mapsto t, t \mapsto -1 + \frac{t}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right)$.

$$\mathcal{S}_E(]-1, 1[) = \left\{ t \mapsto -\lambda + \frac{\lambda}{2} t \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) + \mu t, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Exercice 04

On considère le système différentiel (S) suivant :
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) + t \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 1 \end{cases}$$

En posant, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, (S) s'écrit $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

1. On remarque que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = (x-3)(x+1)$.

La matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes, elle est donc diagonalisable sur \mathbf{R} .

Il existe une matrice inversible P telle que $\Delta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Après calculs, la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

2. On a : $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. On appelle Δ la matrice diagonale $Diag(\lambda_1, \lambda_2)$. La relation entre A , P et Δ est $A = P\Delta P^{-1}$.

4. On note $Y(t)$ les coordonnées d'un vecteur exprimées dans la base définie par P .

On rappelle la relation de changement de base $X(t) = PY(t)$. L'équation (S) devient :

$$[X'(t) = AX(t) + B(t)] \Rightarrow [X'(t) = (P\Delta P^{-1})X(t) + B(t)] \Rightarrow$$

$$[P^{-1}X'(t) = \Delta(P^{-1}X(t)) + P^{-1}B(t)] \Rightarrow [Y'(t) = \Delta Y(t) + P^{-1}B(t)].$$

5. D'où le système :
$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) + \frac{t+2}{4} & (L_1) \\ y_2'(t) = -y_2(t) + \frac{-t+2}{4} & (L_2) \end{cases}.$$

Ces deux équations sont indépendantes l'une de l'autre. On les résout successivement.

La solution générale de (L_1) est (après calculs) : $y_1(t) = \lambda_1 e^{3t} - \frac{3t+7}{36}$, où $\lambda_1 \in \mathbf{R}$.

De même, la solution générale de (L_2) est (après calculs) : $y_2(t) = \lambda_2 e^{-t} + \frac{-t+3}{4}$, où $\lambda_2 \in \mathbf{R}$.

La solution générale du système (S) est donnée par $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$.

Après avoir déroulé les calculs :
$$\begin{cases} x_1(t) = 2\lambda_1 e^{3t} - 2\lambda_2 e^{-t} + \frac{3t-17}{9} \\ x_2(t) = \lambda_1 e^{3t} + \lambda_2 e^{-t} + \frac{5-3t}{9} \end{cases}$$

Les solutions dépendent de (λ_1, λ_2) car il n'y a pas de conditions initiales.