

# Devoir libre 06

## KORREKTUR

1

### Partie I

#### Autour du vecteur gradient

**1-a Un exemple :** on considère  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}$ .

La fonction  $f_1$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  car ses dérivées partielles premières existent et sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ , et on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = (2x - 2x^3 - 2xy) e^{-(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = (1 - 2x^2y - 2y^2) e^{-(x^2+y^2)}.$$

Alors :  $\nabla f_1(x, y) = \left( (2x - 2x^3 - 2xy) e^{-(x^2+y^2)}, (1 - 2x^2y - 2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \right)$ .

**1-b** Déterminons les points critiques de  $f_1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Les points critiques de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  annulent  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  :

$$\begin{cases} 2x - 2x^3 - 2xy = 0 \\ 1 - 2x^2y - 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - x^2 - y) = 0 \\ 2y(x^2 + y) = 1 \end{cases}.$$

Premier cas :  $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1/\sqrt{2}$ . On trouve  $\left( 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .

Deuxième cas :  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$ .

On trouve  $\left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$ . Au total, on a donc quatre points critiques.

**2-a** On considère  $\phi : t \mapsto f(A + t\vec{V})$ .

•  $\phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (et est même de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ) car  $t \mapsto A + t\vec{V}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et les dérivées partielles de  $f$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$  et donc par la règle de la chaîne, la dérivée de  $\phi$  existe et est une somme de produits de composées de fonctions continues.

• Posons  $A = (x_0, y_0)$ . On écrit :  $\phi(t) = f\left(x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(A), y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$ .

Alors  $\phi'(t)$  vaut, en utilisant la **règle de la chaîne** :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) \times \frac{\partial f}{\partial x}(A + t\vec{V}) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \times \frac{\partial f}{\partial y}(A + t\vec{V}).$$

Et donc pour  $t = 0$  :

$$\phi'(0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right)^2.$$

**2-b**  $\phi'(0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right)^2 > 0$  car  $\nabla f(A) \neq \vec{0}$ .

Donc dans un voisinage de 0,  $\phi$  est strictement croissante et il existe  $r > 0$ , tel que pour  $t \in ]0, r]$ ,  $\phi(t) > \phi(0) : \forall t \in ]0, r], f(A + t\vec{V}) > f(A)$ .

Si l'on pose  $A' = A + t\vec{V}$ , le vecteur  $\overrightarrow{AA'}$  est dans le sens de  $\vec{V}$  (car  $t > 0$ ) et on a la relation :  $f(A') > f(A)$ .

**Remarque :** La direction du vecteur gradient indique donc la « pente » de plus grande inclinaison, on peut aussi dire qu'elle pointe vers les zones de valeurs plus grandes. Le vecteur  $\vec{V}$  est bien dirigé selon les valeurs croissantes de  $f$ .

**2-c** On a :  $f(A + t\vec{V}) = f(A) + \langle \vec{V}, t\vec{V} \rangle + \|t\vec{V}\|\varepsilon(t)$ , avec  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ .

Donc :  $\frac{f(A + t\vec{V}) - f(A)}{t} = \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{V}\|\varepsilon(t)$ . En conclusion, la norme du vecteur gradient est proportionnelle à la variation, plus celle-ci est importante, plus le vecteur est long.

**Remarque** Ainsi, dans un champ de gradients de  $f$ , on peut repérer les points qui correspondent à des extrema de  $f$ . Les flèches étant dirigées vers des valeurs croissantes de  $f$ , on repère un minima car en ce point, les flèches sont dirigées vers l'extérieur du point. De plus la taille de la flèche permet de repérer si  $f$  varie beaucoup ou non. Ainsi, si l'on représente des lignes de niveaux  $f(x, y) = \lambda$  dans un champs de gradients, là où les lignes de niveau se rapprochent, les vecteurs gradients sont plus longs.

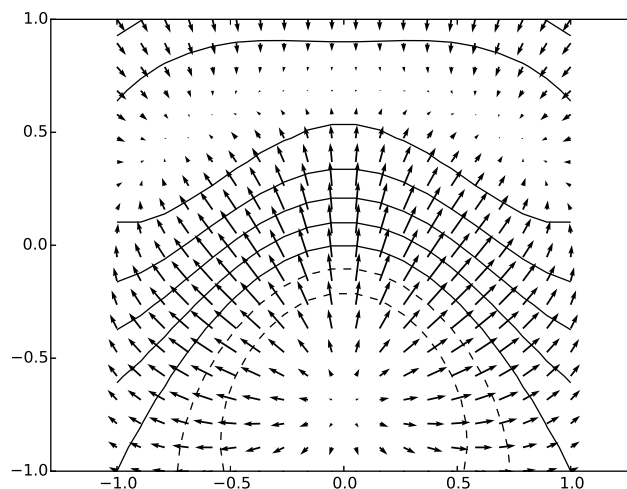
**3.** On reprend la fonction  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$  de la question 1.

Visualisons le champ de gradient associé à  $f_1$  pour  $L = [-1, 1]^2$  et  $n = 20$ . Les dérivées partielles d'ordre 1 ont été calculées à la question 1. On interprétera le champ dessiné pour se faire une idée des points critiques et des extrema. On pourra rajouter quelques lignes de niveau  $f(x, y) = k$  avec  $k \in \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
def gradient(x, y):
    aux = np.exp(-x**2 - y**2)
    gx = 2*(x - x**3 - x*y)*aux; gy = (1 - 2*y*(x**2 + y))*aux
    return gx, gy
X = np.linspace(-1, 1, 20); Y = np.linspace(-1, 1, 20)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
def f(x, y):
    aux = np.exp(-x**2 - y**2)
    return (x**2 + y)*aux
L = [-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]; Z = f(X, Y)
gX, gY = gradient(X, Y); plt.axis('equal');
plt.contour(X, Y, Z, L); plt.quiver(X, Y, gX, gY); plt.show()
```

On a choisi  $[-1, 1]^2$  car les points critiques y sont (voir le corrigé de la question 1).

En  $A = (0, 0.7)$ ,  $B = (0, -0.7)$ ,  $C = (0.7, 0.5)$  et  $D = (-0.7, 0.5)$ , il y a présomption de points critiques (car les flèches sont réduites à un petit point). Puis, en  $B$ , les flèches semblent repoussées, ce qui correspondrait à un minimum. En  $A$ ,  $C$  et  $D$  par contre les flèches semblent converger, d'où une présomption de maximum en ces points. Maintenant, l'interprétation graphique a ses limites car en  $A$ , la suite du corrigé y fera apparaître un point selle. Cela est dû au fait que le vecteur gradient est très petit au voisinage de ce point et on voit mal sa direction. Enfin, on remarque que plus les flèches sont longues, plus l'écart entre les lignes de niveau est faible.



**Remarque :** Les lignes de niveau sont de couleurs différentes par défaut. Pour les obtenir noires, j'ai en fait tapé : `plt.contour(X, Y, Z, L, colors=['0'], extend='both')`

## Partie II

### Autour de la détermination d'extrema

La **matrice hessienne en un point  $a$  de  $f$** , fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  (contenant  $a$ ) et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , notée  $H_f(a)$ , est pour  $p = 2$  (respectivement pour  $p = 3$ ) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{pmatrix} \quad (\text{respectivement}) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) \end{pmatrix}.$$

On dit que  $P \in O_p(\mathbb{R})$  si, et seulement si,  $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est inversible et  $P^{-1} = P^T$ .

On admet que si  $M$  est une matrice symétrique réelle d'ordre  $p$ , c'est-à-dire telle que  $M = M^T$ , il existe un couple (non unique) de matrices  $(P, \Delta)$ , où  $P \in O_p(\mathbb{R})$  et  $\Delta$  est diagonale, tel que :

$$M = P \cdot \Delta \cdot P^T \Leftrightarrow \Delta = P^T M P.$$

On dit que  $M$  est **orthogonalement diagonalisable dans  $\mathbb{R}$** .

Toute matrice hessienne est symétrique réelle d'après le théorème de Schwarz car  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . Elle est donc orthogonalement diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

On admet la **formule de Taylor-Young à l'ordre 2** pour une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^p$ ,  $a \in U$ , et  $h \in \mathbb{R}^p$  (assimilé ainsi que  $\nabla f(a)$  à une matrice de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ) tel que  $a + h \in U$ , alors en supposant  $\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(h) = 0$  :

$$f(a + h) = f(a) + (\nabla f(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

On dit qu'une matrice est **symétrique positive** (respectivement **définie positive**) si et seulement si elle est symétrique réelle et si tous les éléments de son spectre sont des réels positifs ou nuls (respectivement strictement positifs).

On note  $\mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement définies positives) de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

**II-1** Soit  $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ , montrons que  $M \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ .

$M$  est clairement symétrique réelle.

Par ailleurs, son polynôme caractéristique est

$$\chi_M(t) = \begin{vmatrix} t-4 & 2 & 2 \\ 2 & t-4 & 2 \\ 2 & 2 & t-4 \end{vmatrix} = (t-6)^2 t.$$

Le spectre de  $M$  est constitué de deux valeurs propres positives ou nulles 0 et 6 et donc  $M \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ .

**II-2** On reprend  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$ .

Déterminons la matrice hessienne de  $f$  aux 3 points  $\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ .

- Matrice hessienne de  $f$  en  $A = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  :  $H_f(A) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .
- Matrice hessienne de  $f$  en  $B = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  :  $H_f(B) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

- Matrice hessienne de  $f$  en  $C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) : H_f(C) = e^{-3/4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$ .

**II-3** Soit  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  orthogonalement diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , donc il existe un couple (non unique) de matrices  $(P, \Delta)$ , où  $P \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$  et  $\Delta$  est diagonale, tel que :  $M = P \cdot \Delta \cdot P^T$ . On se fixe un tel couple  $(P, \Delta)$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et on pose  $X = PY$ .

$$X^T M X = X^T P \Delta P^{-1} X = (PY)^T P \Delta P^{-1} PY = Y^T P^T P \Delta Y = Y^T \Delta Y.$$

Si l'on pose  $Y^T = (y_1 \ \dots \ y_j \ \dots \ y_p)$  et  $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , on a le produit :

$$Y^T \Delta = (y_1 \ \dots \ y_j \ \dots \ y_p) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_j & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

qui donne  $(\lambda_1 y_1 \ \dots \ \lambda_j y_j \ \dots \ \lambda_p y_p)$ . Ainsi :

$$Y^T \Delta Y = (\lambda_1 y_1 \ \dots \ \lambda_j y_j \ \dots \ \lambda_p y_p) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j^2.$$

**II-4-a** Comme  $a$  est un point critique de  $f$ ,  $\nabla f(a) = \vec{0}$  et la formule :

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

devient :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

**II-4-b**  $f$  présente un minimum local en  $a$  si, et seulement si,  $f(a+h) \geq f(a)$  dans un voisinage de  $a$ , c'est-à-dire dans une boule de centre  $a$ . Et donc dans cette boule,  $h^T H_f(a) h \geq 0$  pour  $h \neq \vec{0}$ . Le minimum local est strict si, et seulement si,  $h^T H_f(a) h > 0$  dans la boule pour  $h \neq 0$ .

**II-4-c**  $f$  présente un maximum local en  $a$  si, et seulement si,  $f(a+h) \leq f(a)$  dans un voisinage de  $a$ , c'est-à-dire dans une boule de centre  $a$ . Et donc dans cette boule,  $h^T H_f(a) h \leq 0$  pour  $h \neq \vec{0}$ . Le maximum local est strict si, et seulement si,  $h^T H_f(a) h < 0$  dans la boule pour  $h \neq 0$ .

**II-4-d** On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^p$  et  $a$  est un **point critique** de  $f$  sur  $U$ .

- Si  $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$  (**définie positive**) alors ses valeurs propres sont strictement positives et donc la quantité  $Y^T \Delta Y = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j^2 > 0$  dès que un  $y_j \neq 0$ . Donc en posant  $M = H_f(a)$  et  $X = h$ , on a aussi  $h^T H_f(a) h > 0$  pour  $h$  non nul et  $f$  atteint en  $a$  un minimum local strict.

Si  $H_f(a) \notin \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$  (**positive**) alors  $H_f(a)$  a des valeurs propres de signe contraire et on peut trouver  $h$  tel que  $h^T H_f(a) h > 0$  et  $h$  tel que  $h^T H_f(a) h < 0$ . Il suffit de prendre pour premier  $h$  un vecteur propre associé à une valeur propre strictement positive et comme second  $h$  un vecteur propre associé à une valeur propre strictement négative.

- Si  $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$  (**définie positive**) alors  $f$  atteint en  $a$  un maximum local strict et si  $-H_f(a) \notin \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$  (**positive**) alors  $f$  n'a pas de maximum en  $a$ . Il suffit s'appliquer ce qui précède à  $-H_f(a)$ .

**II-4-e** On suppose ici  $p = 2$ . Alors  $H_f(a)$  admet deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  réelles.

$$\text{Det}(H_f(a)) = \lambda_1 \lambda_2 \text{ et } \text{tr}(H_f(a)) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

La matrice hessienne  $H_f(a) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  est diagonalisable et admet deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

On sait que  $H_f(a)$  appartient à  $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$  (respectivement  $-H_f(a)$  appartient à  $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ ) si et seulement si  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  (respectivement  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ ).

Or  $\text{Det}(H_f(a)) = \lambda_1 \lambda_2$  et  $\text{tr}(H_f(a)) = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Ainsi  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  (respectivement  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ ) si et seulement si  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$  (respectivement  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ).

On en déduit alors :

- ▶ Si  $\text{Det}(H_f(a)) \leq 0$ ,  $f$  n'a pas d'extremum en  $a$ .
- ▶ Si  $\text{Det}(H_f(a)) > 0$  et  $\text{tr}(H_f(a)) > 0$ ,  $f$  présente un minimum strict en  $a$ .
- ▶ Si  $\text{Det}(H_f(a)) > 0$  et  $\text{tr}(H_f(a)) < 0$ ,  $f$  présente un maximum strict en  $a$ .

**II-5 Exemple :** On reprend  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$ .

Trouvons la nature (minimum, maximum, point selle) de  $f$  aux 3 points  $\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ .

- Matrice hessienne de  $f$  en  $A = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et nature de ce point :

$$H_f(A) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{Det}(H_f(A)) < 0, \text{ on en déduit que } A \text{ est un point selle de valeur } f(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

- Matrice hessienne de  $f$  en  $B = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et nature de ce point :

$$H_f(B) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{Det}(H_f(B)) > 0 \text{ et } \text{tr}(H_f(B)) > 0, \text{ on en déduit que } B \text{ est un minimum local strict, de valeur } f(B) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

- Matrice hessienne de  $f$  en  $C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$  et nature de ce point :

$$H_f(C) = e^{-3/4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}, \text{Det}(H_f(C)) > 0 \text{ et } \text{tr}(H_f(C)) < 0, \text{ on en déduit que } C \text{ est un maximum local strict, de valeur } f(C) = e^{-\frac{3}{4}}.$$

**II-6-a** Montrons :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq |f(x, y)| \leq \left((\max(|x|, |y|))^2 + \max(|x|, |y|)\right) e^{-(\max(|x|, |y|))^2}$ .

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(\max(|x|, |y|))^2 \leq |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$ .

Donc on a l'inégalité : (1)  $e^{-(x^2 + y^2)} \leq e^{-(\max(|x|, |y|))^2}$ .

Puis on utilise :  $|x|^2 \leq (\max(|x|, |y|))^2$  et  $|y| \leq \max(|x|, |y|)$ .

Alors, on a : (2)  $|x^2 + y| \leq |x|^2 + |y| \leq (\max(|x|, |y|))^2 + \max(|x|, |y|)$ .

En combinant les inégalités (1) et (2), on a bien celle demandée.

**II-6-b** En remarquant que  $\lim_{u \rightarrow +\infty} (u^2 + u)e^{-u^2} = 0$ , montrons :

$$\exists r > 0, \max(|x|, |y|) \geq r \Rightarrow 0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}.$$

Posons  $g(u) = (u^2 + u)e^{-u^2}$ . Comme  $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 0$ , il existe  $r > 0$  tel que dès que  $u \geq r$ ,  $g(u) \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$  et comme  $|f(x, y)| \leq g(u)$ , (en posant  $u = \max(|x|, |y|)$ ), on conclut .

$$\exists r > 0, \max(|x|, |y|) \geq r \Rightarrow 0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}.$$

**II-6-c** On pose  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|, |y|) \leq r\}$ .

$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|, |y|) \leq r\}$  est un carré et est une boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $r$  pour la norme  $N_1$  de  $\mathbb{R}^2$ , c'est donc un fermé-borné de  $\mathbb{R}^2$ .

**II-6-d**  $A = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $B = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $D = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ .

Alors  $f(A) = |f(B)| = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$  et (la matrice hessienne de  $D$  par rapport à celle de  $C$ , a les coefficients de la diagonale principale opposés)  $f(C) = f(D) = e^{-\frac{3}{4}} > \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$ .

Par contraposée de l'implication de **4-b**, on peut dire que ces quatre points (les points critiques de  $f$ ) sont dans  $K$ .

On rappelle que  $C$  et  $D$  sont des maxima locaux et que  $B$  est un minimum local. Or  $f(B) < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$  et  $f(C) = f(D) > f(A)$ . Donc  $B$  est un minimum absolu et  $C$  et  $D$  représentent un maximum absolu.

### Partie III

#### *Position locale d'une surface par rapport à son plan tangent en un point*

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  rapporté à un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la surface  $\Sigma : z = g(x, y)$ , où  $g$  est une fonction de classe  $C^2$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$ . On pose  $f : (x, y, z) \mapsto z - g(x, y)$ .

Soit  $M_0(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$  un point de  $\Sigma$  et on pose  $z_0 = g(x_0, y_0)$ .

**III-1** On a :  $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 1$ . Et :

$$\nabla f(M_0) = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right).$$

**III-2** Une équation cartésienne du plan tangent  $\Pi_{M_0}$  au point régulier  $M_0$  à  $\Sigma$  est donnée dans le cours par :

$$-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + 1 \times (z - z_0) = 0.$$

Ce qui s'écrit bien :

$$z = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**III-3** On pose  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  et  $x = x_0 + h_1$ ,  $y = y_0 + h_2$ .

On note  $H_g(x_0, y_0)$  la matrice hessienne de  $g$  en  $(x_0, y_0)$ .

Rappelons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 appliquée à  $g$  :

$$\boxed{g(a+h) = g(a) + (\nabla g(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_g(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h)}$$

Ici  $h^T = (h_1, h_2)$ ,  $a = (x_0, y_0)$ ,  $(\nabla g(a))^T = \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$  et

$$H_g(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Alors :  $(\nabla g(a))^T h = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)h_2$ .

Et :  $h^T H_g(a) h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ , qui vaut :

$$\frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right).$$

Enfin,  $\|h\|^2 \varepsilon(h) = (h_1^2 + h_2^2) \varepsilon((h_1, h_2))$ .

On a bien :

$$g(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 \\ + \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) + (h_1^2 + h_2^2) \varepsilon((h_1, h_2)),$$

où  $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \varepsilon((h_1, h_2)) = 0$ .

**III-4** Soit le point  $P_{h_1, h_2}$  du plan tangent  $\Pi_{M_0}$  d'abscisse  $x = x_0 + h_1$  et d'ordonnée  $y = y_0 + h_2$  tel que  $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in U$ . On pose :

$$z_{\Pi_{M_0}} = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)h_2.$$

• Justifions que  $(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_{\Pi_{M_0}})$  est le point  $P_{h_1, h_2}$  du plan  $\Pi_{M_0}$ .

En effet, si l'on remplace  $x$  par  $x_0 + h_1$  et  $y$  par  $y_0 + h_2$  dans l'équation du plan tangent  $\Pi_{M_0}$ , alors :

$$z = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est la cote du point  $P_{h_1, h_2}$  et vaut donc bien

$$z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)h_2.$$

• On pose  $z_\Sigma = g(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ , alors  $(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_\Sigma) \in \Sigma$  car  $z = g(x, y)$  est une équation de  $\Sigma$ .

On étudie le signe de  $z_\Sigma - z_{\Pi_{M_0}} = g(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - z_{\Pi_{M_0}}$ . C'est-à-dire :

$$g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 \\ + \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) \\ - g(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + (h_1^2 + h_2^2) \varepsilon((h_1, h_2)).$$

Il reste bien :

$$\frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) + (h_1^2 + h_2^2) \varepsilon((h_1, h_2)),$$

où  $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \varepsilon((h_1, h_2)) = 0$ .

**III-5** On a bien, d'après plus haut :

$$h^T H_g(x_0, y_0)h = h_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

• Si  $\text{Det}(H_g(x_0, y_0)) > 0$  et si  $\text{tr}(H_g(x_0, y_0)) > 0$ , alors d'après **II-4-d** et **II-4-e**, pour  $h$  non nul,  $h^T H_g(x_0, y_0)h > 0$  et donc  $z_\Sigma - z_{\Pi_{M_0}} > 0$  et la surface reste bien localement au dessus de son plan tangent  $\Pi_{M_0}$ .

• Si  $\text{Det}(H_g(x_0, y_0)) > 0$  et si  $\text{tr}(H_g(x_0, y_0)) < 0$ , toujours d'après **II-4-d** et **II-4-e**, pour  $h$  non nul,  $h^T H_g(x_0, y_0)h < 0$  et donc  $z_\Sigma - z_{\Pi_{M_0}} < 0$  et la surface reste localement en dessous de son plan tangent  $\Pi_{M_0}$ .

• Si  $\text{Det}(H_g(x_0, y_0)) < 0$ , les deux valeurs propres de  $H_g(x_0, y_0)$  sont de signes contraires et le signe de  $h^T H_g(x_0, y_0)h$  est différent dépend de  $h$  (il suffit de prendre  $h$  vecteur propre de chaque valeur propre pour avoir deux signes différents).  $z_\Sigma - z_{\Pi_{M_0}}$  change de signe et le plan tangent  $\Pi_{M_0}$  traverse localement la surface.

• Si  $\text{Det}(H_g(x_0, y_0)) = 0$ , on ne peut rien dire bien entendu et il faut faire une étude de signe directe.

**III-6-a Un exemple** : On considère la surface  $\Sigma : z = x^3 + y^3 - 3xy$  et on pose  $M_0 = (1, 1, -1)$ .

• comme  $-1 = 1 + 1 - 3$ , c'est OK,  $M_0 \in \Sigma$ .

**III-6-b** Déterminons une équation du plan tangent  $\Pi_{M_0}$  à  $\Sigma$  en  $M_0$ .

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 0.$$

Alors le plan tangent  $\Pi_{M_0}$  à  $\Sigma$  en  $M_0(1, 1, -1)$  a pour équation :

$$z = -1 + 0 \times (x - 1) + 0 \times (y - 1) \Leftrightarrow z = -1.$$

**III-6-c** Écrivons la matrice hessienne de  $g : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$  en  $(1, 1)$ . On a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = -3 \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

Il reste :

$$H_g(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1, 1) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\text{Det}(H_g(1, 1)) = 27 > 0$  et  $\text{tr}(H_g(1, 1)) = 12 > 0$ . On en déduit la position locale de  $\Pi_{M_0}$  par rapport à  $\Sigma$  autour de  $M_0$ . La surface reste localement au dessus du plan tangent.

**III-6-c Application Python.** Dessinons  $\Sigma$  et  $\Pi_{M_0}$ . On prend ici  $x \in [0, 2]$  et  $y \in [0, 2]$ , puis  $h = 0.001$ .

```
def f(x, y):
    return x**3+y**3 - 3*x*y
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
X = np.arange(0, 2, 0.001); Y = np.arange(0, 2, 0.001)
X, Y = np.meshgrid(X, Y); Z = f(X, Y)
ax = Axes3D(plt.figure()); ax.plot_surface(X, Y, Z); plt.show()
```

On remarque que le plan sous la surface dessinée est  $z = -1$  (qui est donc bien dessous).