Devoir libre 06

2TSI. Mathématiques

A rendre le lundi 14 février 2022

INSTRUCTIONS : les trois parties ne sont pas indépendantes. La partie III est en bonus et n'est pas obligatoire. Les questions Python (I-3 et III-6-c) peuvent être traitées sur une feuille à part, il faudra penser à imprimer notamment le champ de gradients ou la surface.

Partie I

Autour du vecteur gradient

1. **Un exemple** : on considère $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}$.
   (a) Justifier que f_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1. En déduire le vecteur gradient ∇f_1 en tout point (x, y).
   (b) Déterminer les points critiques de f_1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. **Quelques propriétés d'un champ de gradients.**
   Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $A \in \mathbb{R}^2$ fixé et on suppose $\vec{V} = \nabla f(A) \neq \vec{0}$.
   (a) On considère $\phi : t \mapsto f(A + t\vec{V})$, montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, en appliquant la règle de la chaîne :
   $$\phi'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)^2.$$
   (b) Justifier que $\phi'(0) > 0$.
   En déduire que $f(A + t\vec{V}) > f(A)$ pour $t > 0$ assez proche de 0 et que le vecteur $\vec{V}$ est dirigé selon les valeurs croissantes de f.
   (c) Justifier : $f(A + t\vec{V}) = f(A) + \langle \vec{V}, t\vec{V} \rangle + \|t\vec{V}\|\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.
   Que peut-on dire de la norme du vecteur gradient par rapport à la variation de f ?
3. On reprend la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}$ de la question **1**.
   En s'aidant de l'aide **Python** de la page 3, visualiser le champ de gradient associé à f_1 pour $L = [-1, 1]^2$ et $n = 20$. Les dérivées partielles d'ordre 1 ont été calculées à la question **1.** On interprétera le champ dessiné pour se faire une idée des points critiques et des extrema. On pourra rajouter quelques lignes de niveau $f(x, y) = k$ avec $k \in \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$

Partie II

Autour de la détermination d'extrema

La **matrice hessienne en un point** a **de** f, fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ (contenant a) et à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée $H_f(a)$, est pour $p = 2$ (respectivement pour $p = 3$) :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{pmatrix} \text{(respectivement } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) \end{pmatrix}\text{).}$$

T.S.V.P $\to$

On dit que $P \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est inversible et $P^{-1} = P^T$.

On admet que si M est une matrice symétrique réelle d'ordre p, c'est-à-dire telle que $M = M^T$, il existe un couple (non unique) de matrices (P, Δ), où $P \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R})$ et Δ est diagonale, tel que :

$$M = P.\Delta.P^T \Leftrightarrow \Delta = P^T M P.$$

On dit que M est **orthogonalement diagonalisable dans** $\mathbb{R}$.

Toute matrice hessienne est symétrique réelle d'après le théorème de Schwarz car f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Elle est donc orthogonalement diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

On admet la **formule de Taylor-Young à l'ordre** 2 pour une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $h \in \mathbb{R}^p$ (assimilé ainsi que $\nabla f(a)$ à une matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$) tel que $a + h \in U$, alors en supposant $\lim\limits_{h \to \vec{0}} \varepsilon(h) = 0$:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a))^T\, h + \frac{1}{2} h^T H_f(a)\, h + \|h\|^2 \varepsilon(h)}$$

On dit qu'une matrice est **symétrique positive** (respectivement **définie positive**) si et seulement si elle est symétrique réelle et si tous les éléments de son spectre sont des réels positifs ou nuls (respectivement strictement positifs).
On note $\mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement définies positives) de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, montrer que $M \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.
2. **Un exemple** : On reprend $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}$.
   Déterminer la matrice hessienne de f aux 3 points $\left(0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ orthogonalement diagonalisable dans $\mathbb{R}$, donc il existe un couple (non unique) de matrices (P, Δ), où $P \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R})$ et Δ est diagonale, tel que : $M = P.\Delta.P^T$. On se fixe un tel couple $(P,\ \Delta)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et on pose $X = PY$. Montrer :
   $$X^T M X = Y^T \Delta Y.$$
   Si l'on pose $Y^T = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_j & \dots & y_p \end{pmatrix}$ et $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, exprimer $Y^T \Delta Y$ en fonction d'une somme.
4. Déterminons des conditions qui permettent de préciser la nature des points critiques de $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ sur un ouvert U. On suppose que $a \in U$ est un point critique de f.
   (a) Justifier que sous ces conditions, quand $h \to 0$,
   $$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$
   (b) En déduire que f présente un minimum local en a si, et seulement si, $h^T H_f(a) h \geqslant 0$ pour $h \neq \vec{0}$ inclus dans une certaine boule de centre a. Quelle condition doit-on avoir pour que le minimum local soit strict ?
   (c) De même, trouver une inégalité du même type qui caractérise le fait que a soit un maximum local ? Un maximum local strict ?
   (d) Montrer en utilisant la question **II-3** que si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ et a est un **point critique** de f sur U :
   - Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ (**définie positive**) alors f atteint en a un minimum local strict;
   - Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ (**positive**) alors f n'a pas de minimum en a.
   - Si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ (**définie positive**) alors f atteint en a un maximum local strict;
   - Si $-H_f(a) \notin \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ (**positive**) alors f n'a pas de maximum en a.

   (e) **On suppose ici** $p = 2$. Alors $H_f(a)$ admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 réelles. Écrire Det $(H_f(a))$ et tr $(H_f(a))$ en fonction de λ_1 et de λ_2. Montrer alors que :
   - Si Det $(H_f(a)) \leqslant 0$, f n'a pas d'extremum en a.
   - Si Det $(H_f(a)) > 0$ et tr $(H_f(a)) > 0$, f présente un minimum strict en a.
   - Si Det $(H_f(a)) > 0$ et tr $(H_f(a)) < 0$, f présente un maximum strict en a.

5. **Exemple :** On reprend $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x^2+y)e^{-(x^2+y^2)}$.
   Trouver la nature (minimum, maximum, point selle) de f aux 3 points $\left(0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$.

6. On se propose trouver tous les extrema de $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x^2+y)e^{-(x^2+y^2)}$ sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \Big((\max(|x|,|y|))^2 + \max(|x|,|y|)\Big)\, e^{-(\max(|x|,|y|))^2}$.

   (b) En remarquant que $\lim\limits_{u \to +\infty} (u^2+u)e^{-u^2} = 0$, montrer :

   $$\exists r > 0,\ \max(|x|,|y|) \geqslant r \Rightarrow 0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}.$$

   Dans la suite, on fixe un tel r.

   (c) On pose $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \max(|x|,|y|) \leqslant r\right\}$. À quoi ressemble géométriquement K ?
   Justifier que K est un fermé-borné de $\mathbb{R}^2$.

   (d) Vérifier que tous les points critiques de f sont dans K.
   En déduire tous les extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et les points où ils sont atteints.

Partie III

Position locale d'une surface par rapport à son plan tangent en un point

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la surface $\Sigma :\ z = g(x,y)$, où g est une fonction de classe C^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On pose $f : (x,y,z) \mapsto z - g(x,y)$.
Soit $M_0(x_0, y_0, g(x_0,y_0))$ un point de Σ et on pose $z_0 = g(x_0,y_0)$.

1. Écrire le vecteur gradient $\nabla f(M_0)$ en fonction des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan tangent Π_{M_0} au point régulier M_0 à Σ est :

$$z = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

3. On pose $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ et $x = x_0 + h_1$, $y = y_0 + h_2$. On note $H_g(x_0,y_0)$ la matrice hessienne de g en (x_0,y_0). En utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 appliquée à g, montrer :

$$g(x_0+h_1, y_0+h_2) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)h_2$$

$$+\frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + h_2^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right) + \left(h_1^2+h_2^2\right)\varepsilon((h_1,h_2)),$$

   où $\lim\limits_{(h_1,h_2)=(0,0)} \varepsilon((h_1,h_2)) = 0$.

4. Soit le point P_{h_1,h_2} du plan tangent Π_{M_0} d'abscisse $x = x_0 + h_1$ et d'ordonnée $y = y_0 + h_2$ tel que $(x_0+h_1, y_0+h_2) \in U$. On pose :

$$z_{\Pi_{M_0}} = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)h_2.$$

   Justifier que $\left(x_0+h_1, y_0+h_2, z_{\Pi_{M_0}}\right)$ est le point P_{h_1,h_2} du plan Π_{M_0}.
   On pose $z_\Sigma = g(x_0+h_1, y_0+h_2)$, alors $(x_0+h_1, y_0+h_2, z_\Sigma) \in \Sigma$.
   On étudie le signe de $z_\Sigma - z_{\Pi_{M_0}}$. Montrer que cette différence est :

$$\frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + h_2^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right) + \left(h_1^2+h_2^2\right)\varepsilon((h_1,h_2)),$$

   où $\lim\limits_{(h_1,h_2)=(0,0)} \varepsilon((h_1,h_2)) = 0$.

5. En utilisant $h^T H_g(x_0,y_0)h = h_1^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2h_1h_2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + h_2^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ et les résultats de la partie II, montrer que :
   - ▶ Si Det $(H_g(x_0,y_0)) > 0$ et si tr $(H_g(x_0,y_0)) > 0$, $z_\Sigma - z_{\Pi_{M_0}} > 0$ et la surface reste localement au dessus de son plan tangent Π_{M_0}.
   - ▶ Si Det $(H_g(x_0,y_0)) > 0$ et si tr $(H_g(x_0,y_0)) < 0$, $z_\Sigma - z_{\Pi_{M_0}} < 0$ et la surface reste localement en dessous de son plan tangent Π_{M_0}.
   - ▶ Si Det $(H_g(x_0,y_0)) < 0$, $z_\Sigma - z_{\Pi_{M_0}}$ change de signe et le plan tangent Π_{M_0} traverse localement la surface.
   - ▶ Si Det $(H_g(x_0,y_0)) = 0$, on ne peut rien dire et il faut faire une étude de signe directe.
6. **Un exemple** : On considère la surface $\Sigma : z = x^3 + y^3 - 3xy$ et on pose $M_0 = (1,1,-1)$.
   (a) Vérifier que $M_0 \in \Sigma$. Déterminer une équation du plan tangent Π_{M_0} à Σ en M_0.
   (b) Écrire la matrice hessienne de $g : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ en $(1,1)$. En déduire la position locale de Π_{M_0} par rapport à Σ autour de M_0.
   (c) **Application Python**. Dessiner Σ et Π_{M_0}.

Quelques méthodes PYTHON utiles

❑ Méthode 0.1.— Comment tracer une ligne de niveau ou une surface

- ▶ Pour ***tracer des lignes de niveau*** $\{(x,y) \in [a,b] \times [c,d],\ f(x,y) = k\}$, où k est un réel (qui peut prendre plusieurs valeurs), on fait une grille en X et en Y de pas h sur laquelle on calcule les valeurs de f. On emploie ensuite `contour` du module `matplotlib.pyplot` en mettant dans une liste L les valeurs de k pour lesquelles on désire le tracé. On tape selon le modèle de syntaxe suivant.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
X = np.arange(a,b,h); Y = np.arange(c,d,h)
X,Y = np.meshgrid(X,Y); Z = f(X,Y) ; L=[k1,k2,...,kp]
plt.axis('equal'); plt.contour(X,Y,Z,L);plt.show()
```

- ▶ Pour ***tracer une surface***, d'équation $z = f(x,y)$, on réalise d'abord une grille en (x,y) en supposant $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$ avec un pas h puis on calcule les valeurs de z correspondants aux points de cette grille. puis on fait le tracé avec `plot_surface` issu du module `mpl_toolkits.mplot3d`. On tape selon le modèle suivant.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
X = np.arange(a,b,h); Y = np.arange(c,d,h)
X,Y = np.meshgrid(X,Y); Z=f(X,Y)
ax = Axes3D(plt.figure( )); ax.plot_surface(X,Y,Z); plt.show()
```

❑ Méthode 0.2.— Comment tracer un champ de gradients (ou de vecteurs) dans le plan $\mathbb{R}^2$

On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie $L = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On désire tracer les vecteurs gradients de f en différents points de L qui suivent le quadrillage imposé par `X` pour les abscisses et `Y` pour les ordonnées. On rentre les packages utilisés.
`import numpy as np;import matplotlib.pyplot as plt`
Puis, on rentre la fonction `gradient` d'arguments `x` et `y` qui renvoie `gx,gy`
Ensuite, on tape `X = np.linspace(a,b,n); Y = np.linspace(c,d,n)` avec les valeurs a,b,c et d souhaitées. On prendra n pas trop grand (par exemple $n = 20$). Puis, on passe à la visualisation :
`X,Y = np.meshgrid(X,Y);gX,gY = gradient(X,Y);plt.quiver(X,Y,gX,gY)`