TSI2. Concours Blanc 2022

Épreuve de Mathématiques

Duré 4 heures. Les calculatrices sont interdites

La rigueur du raisonnement et la clarté seront prises en compte dans la notation. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Instructions propre à cette épreuve : elle possède deux problèmes indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 01

On pose $I =]-1, 1[$ et on considère l'équation différentielle, définie sur I par :

$$(E)\ (t^2-1)y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = 0.$$

Q1. On considère dans cette question la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{t^{2p}}{2p-1}$.

- **a.** Quel est son rayon de convergence ?
- **b.** Trouver $(\alpha_1,\ \beta_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour $t \in I$, $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{\alpha_1}{1-t} + \dfrac{\beta_1}{1+t}$.
- **c.** Expliciter en fonction des fonctions usuelles la somme S de cette série entière.

Q2. Première méthode de résolution de (E)

- **a.** On suppose ici $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une solution développable en série entière de (E) autour de 0. Déterminer une relation entre a_n et a_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$.
- **b.** En déduire toutes les solutions développables en série entière autour de 0 de (E). Quel est leur rayon de convergence ? À l'aide de la question **Q1**, expliciter ces solutions.
- **c.** En déduire alors toutes les solutions de (E) sur I.

Q3. Deuxième méthode de résolution de (E)

- **a.** Déterminer $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)} = \dfrac{\alpha_2}{t} + \dfrac{\beta_2}{t-1} + \dfrac{\gamma_2}{t+1}$.
- **b.** Déterminer $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3) \in \mathbb{R}^4$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{t^2(1-t^2)} = \dfrac{\alpha_3}{t} + \dfrac{\beta_3}{t^2} + \dfrac{\gamma_3}{1-t} + \dfrac{\delta_3}{1+t}$.
- **c.** Résoudre l'équation différentielle (F) définie sur $I \setminus \{0\}$, : $Z'(t) + \dfrac{4t^2-2}{t(t^2-1)} Z(t) = 0$.
- **d.** On pose : $\forall t \in I$, $y(t) = t\,z(t)$. Écrire l'équation différentielle (E') vérifiée par z.
- **e.** En utilisant la résolution de (F) déterminer toutes les solutions de (E') et en déduire les solutions de (E).

Problème 02

Partie I : Interpolation de Lagrange

Soient $n+1$ couples $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, les réels x_i soient **tous distincts**. Il s'agit dans cette partie de construire un polynôme P_n de degré au plus égal à n tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on ait l'égalité : $P_n(x_i) = y_i$.

On appelle **polynômes interpolateurs de Lagrange** associés à la famille $(x_0, x_1, ..., x_n)$ les $n+1$ polynômes définis pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ par : $L_i = \displaystyle\prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$.

Q1. On suppose ici $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Déterminer (sous forme développée) les polynômes interpolateurs de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés à la famille (x_0, x_1, x_2).

Q2. On revient au cas général pour la question **Q2** et la question **Q3**.

- **a.** Déterminer pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le degré du polynôme L_i.
- **b.** Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, calculer $L_i(x_j)$.
- **c.** Montrer que la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et justifier qu'elle en est une base.

Q3. Montrer que le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i L_i$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$. Que valent $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i L_i$?

Q4. Écrire sous forme de puissances croissantes l'unique polynôme de degré au plus 2 qui passe par les trois points $(0, 1)$, $(1, -3)$ et $(2, 2)$.

Partie II : Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **polynôme de Tchebychev de degré** n la fonction définie par

$$T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(n \arccos x).$$

Q1. Calculer T_0, T_1 et T_2.

Q2. On pose $\alpha = \arccos x$, en remarquant que $T_n(x) = \mathfrak{Re}\left(e^{in\alpha}\right)$, montrer : $\deg T_n = n$.

Q3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2x\, T_{n+1}(x) - T_n(x)$. Retrouver le fait que T_n est un polynôme de degré n dont on donnera le coefficient dominant.

Q4. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que T_n admet exactement n racines simples : $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour tout k entier de $[\![0, n-1]\!]$.

Q5. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, T_n admet exactement $n+1$ extrema globaux $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ et que $T_n(z_k) = (-1)^k$.
Remarquer ensuite que $\displaystyle\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

Q6. On considère l'application $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

a. Montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour $\langle\, ,\, \rangle$. La normaliser.

Partie III : Optimisation des points d'interpolation de Lagrange

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $(x_0, ..., x_n) \in [a,b]^{n+1}$ **tous distincts** et P_n l'unique polynôme de degré au plus n qui satisfait à $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

On pose : $\phi : [a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$.

On pose aussi : $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$ fixé, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) - P_n(t) - \phi(x)\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$.

a. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et s'annule aux $(n+2)$ points $x_0, ..., x_n, x$ de $[a,b]$.

b. Démontrer qu'il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$.

c. En déduire : $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$, $\exists\, \zeta \in [a,b]$, $\phi(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$.

d. En déduire : $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Q2. **Dans cette question,** $[a,b] = [-1,1]$.

L'objectif est de choisir les points x_0, x_1, ..., x_n pour l'interpolation de Lagrange de telle manière que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \left| \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \right| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.

Nous allons montrer que les points x_0, x_1, ..., x_n qui vérifient cette propriété sont les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1}. Posons alors $\dfrac{1}{2^n} T_{n+1} = \overline{T}_{n+1}$ (et donc $\overline{T}_{n+1}$ est normalisé), considérons $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ **normalisé** quelconque et posons :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \text{ et } \forall k \in [\![0, n+1]\!],\ z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

a. Montrer que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \left| \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) \right| = \frac{1}{2^n}$.

b. Montrer que : $\deg\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right) \leqslant n$ et

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!],\ \left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) = Q(z_k) - \frac{(-1)^k}{2^n}.$$

c. Supposons que $\dfrac{1}{2^n} > \sup\limits_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$ et $k \in [\![0, n+1]\!]$.

Montrer que si k est pair, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) < 0$ et si k est impair, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) > 0$.

En déduire qu'il y a $(n+1)$ changements de signe pour $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)$.

Établir alors une contradiction. Conclure.

Q3. Montrer que si $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v$, on a l'équivalence : $v \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in [a,b]$.

En déduire les réels $x_0, ..., x_n$ de $([a,b])^n$ qui vérifient $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.

Partie IV : Matrice de Vandermonde

Soit $n+1$ réels x_0, x_1, ..., x_n et considérons $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto (P(x_0), ..., P(x_n))$.
On note $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ et $\mathcal{C} = (e_1 = (1,0,...,0),\ e_2 = (0,1,0,...,0),\ ...,\ e_{n+1} = (0,...,0,1))$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q1. Vérifier que Φ est une application linéaire.

Q2. On appelle dans la suite **matrice de Vandermonde** $V(x_0, ..., x_n)$ associée à $(x_0, ..., x_n)$ la matrice représentative de Φ, les espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ étant munis de leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Expliciter la matrice $V(x_0, ..., x_n)$.

On suppose dans la suite de la partie IV que $x_0, x_1, ..., x_n$ sont **tous distincts**.

Q3. **a.** Calculer pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\Phi(Lj)$, où $\mathcal{B}' = (L_0, ..., L_n)$ est la base des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $(x_0, x_1, ..., x_n)$. Écrire alors la matrice représentative de Φ, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ étant munis de leurs bases respectives $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$.

b. Écrire une relation entre $V(x_0, x_1, ..., x_n)$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, où $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base des polynômes interpolateurs de Lagrange.

c. Application numérique : Exprimer $(V(0,1,2))^{-1}$ en utilisant **IV-3-b** et **I-1**.

Partie V : Déterminant de Vandermonde et applications

Pour tout $n \geqslant 1$ et $n+1$ réels x_0, x_1, ..., x_n, on appelle ***déterminant de Vandermonde*** associé à $(x_0, x_1, ..., x_n)$ que l'on notera $\Delta(x_0, ..., x_n)$, le déterminant d'ordre $n+1$: $\mathsf{Det}\ (V(x_0, x_1, ..., x_n))$.
Les quatre premières questions de cette partie sont consacrées à retrouver la formule :

$$\forall n \geqslant 1, \forall (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Delta(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).$$

Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on pose le déterminant d'ordre $p+1$:

$$P_p(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{p-1} & X \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{p-1}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^p & x_1^p & \cdots & x_{p-1}^p & X^p \end{vmatrix}.$$

On peut remarquer que $\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_p) = P_p(x_p)$ est donc le déterminant de Vandermonde associé à $(x_0, ..., x_p)$.

Q1. S'il existe (i,j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$ et $x_i = x_j$, montrer $\Delta(x_0,\ x_1, \cdots, x_p) = 0$.

Q2. Si les x_i sont **distincts**, montrer que $P_p(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, de racines $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ et de coefficient dominant $\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})$.

Q3. En déduire que *dans tous les cas*
$\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_p) = (x_p - x_0)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1})\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})$.

Q4. Montrer alors :

$$\forall n \geqslant 1, \forall (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Delta(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Q5. **Application 1**. Ici $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^\star)^3$, soit $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Exprimer Δ_1 en utilisant $\Delta(a^2, b^2, c^2)$ puis l'écrire sous forme factorisée.

Q6. **Application 2**. Ici $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, soit $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Écrire le coefficient de x^2 dans le polynôme $\Delta(a, b, c, x)$ en fonction de Δ_2.
En déduire la forme factorisée de Δ_2.

Q7. **Application 3**. Soient $n \geqslant 3$ un entier naturel, $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$ une famille de n éléments de $\mathbb{R}$ **tous distincts** et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_k par : $x \mapsto e^{\gamma_k x}$.

a. Soient $(m_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ un n-uplet de scalaires, et $\Psi = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k$.

Calculer les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n - 1$.

b. En déduire que la famille $(\psi_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ est libre dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.