Concours blanc Maths 2022

CORRECTION Problème 01

Q1. On considère dans cette question la série entière $\sum_{p\geqslant 1} \frac{t^{2p}}{2p-1}$.

a. Quel est son rayon de convergence ?

On écrit en posant $u_p(t) = \frac{t^{2p}}{2p-1}$,

$$\left|\frac{u_{p+1}(t)}{u_p(t)}\right| = \left|\frac{\frac{t^{2p+2}}{2p+1}}{\frac{t^{2p}}{2p-1}}\right| = \left|\frac{2p-1}{2p+1}t^2\right|,$$

quantité qui tend vers t^2 quand p tend vers $+\infty$. Donc si $t^2 < 1$, la série converge absolument et si $t^2 > 1$, la série diverge grossièrement. Le rayon de convergence est $R = 1$.

b. Trouvons $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour $t \in I$, $\frac{1}{1-t^2} = \frac{\alpha_1}{1-t} + \frac{\beta_1}{1+t}$.

On trouve rapidement $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$.

c. Explicitons en fonction des fonctions usuelles la somme S de cette série entière. Pour $t \in]-1, 1[$,

$$S(t) = t\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^{2p-1}}{2p-1}.$$

Par ailleurs, $\sum_{p=1}^{+\infty} t^{2p-2} = \sum_{p=0}^{+\infty} t^{2p} = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$.

Il reste à intégrer sur $]-1, 1[$.

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^{2p-1}}{2p-1} = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$$

Il reste : $S(t) = \frac{t}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.

Q2. Première méthode de résolution de (E)

a. On pose $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une solution développable en série entière de (E) autour de 0.

On écrit :

$$(t^2-1)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

On développe et on fait un glissement d'indice dans la deuxième somme.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n t^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, pour tout $n \geqslant 2$,

$$n(n-1)a_n + 2na_n - 2a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0.$$

Ce qui donne pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1} a_n$.
Puis en identifiant pour $n = 0$, $2a_2 - 2a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_0$ et en identifiant pour $n = 1$, $-6a_3 + 2a_1 - 2a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$.
En conclusion, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{n-3}{n-1} a_{n-2}$ et $a_3 = 0$. Il n'y a aucune condition sur a_0 et a_1.

b. Explicitons a_n. On voit rapidement que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$. Posons $n = 2p$ alors :

$$a_{2p} = \frac{2p-3}{2p-1} a_{2p-2} = \frac{2p-3}{2p-1} \times \frac{2p-5}{2p-3} \times \frac{2p-7}{2p-5} \times ... \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} a_2 = \frac{a_2}{2p-1} = \frac{-a_0}{2p-1}.$$

Ainsi $y(t) = -a_0 \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p-1}}{2p-1} + a_1 t = a_0 (1 - S(t)) + a_1 t$, où S est la somme de **I-1**.
Les fonctions $t \mapsto a_0$ et $t \mapsto a_1 t$ sont de rayon infini et S de rayon 1.
Donc sur $]-1, 1[$, toutes ces solutions sont valables.

c. On remarque que l'ensemble des solutions développables en série entière de (E) est l'ensemble des combinaisons linéaires de $t \mapsto 1 - S(t)$ et de $t \mapsto t$. C'est donc un espace vectoriel de dimension 2 qui coincide avec toutes les solutions (car l'ensemble des solutions d'un équation différentielle linéaire du second degré est un espace vectoriel de dimension 2).

Q3. Deuxième méthode de résolution de (E)

a. Déterminons $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)} = \dfrac{\alpha_2}{t} + \dfrac{\beta_2}{t-1} + \dfrac{\gamma_2}{t+1}$.

Déterminons $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^3$ en posant $F(t) = \dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)}$

$\alpha_2 = [F(t)t]_{t=0} = \left[\dfrac{2-4t^2}{t^2-1}\right]_{t=0} = -2$, $\beta_2 = [F(t)(t-1)]_{t=1} = \left[\dfrac{2-4t^2}{t(t+1)}\right]_{t=0} = -1$.

Et enfin : $\gamma_2 = [F(t)(t+1)]_{t=-1} = \left[\dfrac{2-4t^2}{t(t-1)}\right]_{t=-1} = -1$.

b. Déterminons $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3) \in \mathbb{R}^4$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{t^2(1-t^2)} = \dfrac{\alpha_3}{t} + \dfrac{\beta_3}{t^2} + \dfrac{\gamma_3}{1-t} + \dfrac{\delta_3}{1+t}$.
On pose :

$$H(t) = \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{\alpha_3}{t} + \frac{\beta_3}{t^2} + \frac{\gamma_3}{1-t} + \frac{\delta_3}{1+t}.$$

On a : $\beta_3 = \left[t^2 H(t)\right]_{t=0} = \left[\dfrac{1}{1-t^2}\right]_{t=0} = 1$ puis $\gamma_3 = [H(t)(1-t)]_{t=1} = \left[\dfrac{1}{t^2(1+t)}\right]_{t=1} = \dfrac{1}{2}$ puis $\delta_3 = [H(t)(1+t)]_{t=-1} = \left[\dfrac{1}{t^2(1-t)}\right]_{t=-1} = \dfrac{1}{2}$ et enfin $\lim\limits_{t \to +\infty} tH(t) = 0 = \alpha_3 - \gamma_3 + \delta_3 \Rightarrow \alpha_3 = 0$.

c. Résolvons l'équation différentielle (F) définie sur $I \setminus \{0\}$, : $Z'(t) + \dfrac{4t^2-2}{t(t^2-1)} Z(t) = 0$.

On cherche une primitive de $t \mapsto \dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)}$.
Il est temps d'utiliser notre décomposition en éléments simples.
On cherche donc une primitive de :

$$t \mapsto \frac{-2}{t} + \frac{-1}{t-1} + \frac{-1}{t+1}.$$

Rapidement, on trouve $t \mapsto \ln\left|\dfrac{1}{t^2(t^2-1)}\right|$ pour $t \in I \setminus \{0\}$.

Et les solutions Z de (F) sont :

$$t \mapsto \lambda \exp\left(\ln\left|\frac{1}{t^2(t^2-1)}\right|\right) = \lambda\left|\frac{1}{t^2(t^2-1)}\right| = \frac{\lambda}{t^2(1-t^2)}.$$

d. On pose : $\forall t \in I,\ y(t) = t\,z(t)$. Écrivons l'équation différentielle (E') vérifiée par z.
On a, pour tout $t \in I$, $y'(t) = z(t) + t\,z'(t)$ et $y''(t) = 2\,z'(t) + t\,z''(t)$.
On remplace dans (E). On obtient :

$$(t^2-1)\,(2z'(t)+tz''(t)) + 2t\,(z(t)+tz'(t)) - 2tz(t) = 0.$$

Ce qui donne : $t(t^2-1)z''(t) + (4t^2-2)z'(t) = 0$.
e. En utilisant la résolution de (F) déterminons toutes les solutions de (E').
Si l'on pose $z'(t) = Z(t)$, (E) est ramené à (F) que l'on a résout à **3.** Ici $Z(t) = \dfrac{K}{t^2(1-t^2)}$. Il reste à intégrer Z. Pour cela, on utilise la décomposition en éléments simples de **2.**
Pour tout $t \in I \setminus \{0\}$, $Z(t) = \dfrac{\lambda}{t^2} + \dfrac{\lambda}{2}\left(\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}\right)$.
Et donc :

$$\forall t \in I \setminus \{0\},\ z : t \mapsto -\frac{\lambda}{t} + \frac{\lambda}{2}.\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \mu, \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Il reste à multiplier par t : $\forall t \in I \setminus \{0\},\ y : t \mapsto -\lambda + \dfrac{\lambda}{2}t\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) + \mu\,t$, où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
On peut remarquer que y est prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = -\lambda$.
On pose $y(0) = -\lambda$ et on note toujours y ce prolongement. La fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. On a ainsi l'ensemble $\mathcal{S}_E(]-1,1[)$ des solutions de (E) sur $I =]-1,1[$ qui forme un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\left(t \mapsto t,\ t \mapsto -1 + \dfrac{t}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)\right)$.

$$\mathcal{S}_E(]-1,1[) = \left\{t \mapsto -\lambda + \frac{\lambda}{2}t\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \mu\,t,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

CORRECTION. Problème 02

Partie I : Interpolation de Lagrange

Soient $n+1$ couples $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les réels x_i soient **tous distincts**. Il s'agit dans cette partie de construire un polynôme P de degré au moins n tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on ait l'égalité : $P(x_i) = y_i$.
On appelle **polynômes interpolateurs de Lagrange** associés à la famille $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ les $n+1$ polynômes définis pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ par : $L_i = \displaystyle\prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{X-x_k}{x_i-x_k}$.

Q1. On suppose ici $n=2$, $x_0=0$, $x_1=1$ et $x_2=2$. Déterminons (sous forme développée) les polynômes interpolateurs de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés à la famille (x_0,x_1,x_2).
On a :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)},\ L_1 = \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)},\ L_2 = \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

Ce qui donne :

$$L_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2, L_1 = 2X - X^2, L_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2.$$

Q2. On revient au cas général pour la question **Q2** et la question **Q3**.
a. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le degré du polynôme L_i est évidemment n.
b. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, calculons $L_i(x_j)$.

$$L_i(x_i) = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} \times \prod_{k=i+1}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1.$$

Puis pour $j \neq i$, dans un des produits qui forme $L_i(x_j)$, on rencontre $x_j - x_j = 0$.
Conclusion : Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$

c. Montrons que la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et justifions qu'elle en est une base.

Supposons $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{j=0}^{n} a_j L_j = 0$. En appliquant à $X = x_j$, on a : $a_j = 0$. Et cela pour tout entier $j \in [\![0, n]\!]$. La famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Q3. • Montrons que le polynôme $P = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j$ est l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui vérifie pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.

Existence Déjà, $P(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$. Et cela pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Unicité Supposons qu'il existe deux polynômes M et N de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout j compris entre 0 et n, on ait : $M(x_j) = y_j$ et $N(x_j) = y_j$. Alors $M - N$ admet au moins $n+1$ racines distinctes et est de degré inférieur ou égal à n. Donc $M - N$ est le polynôme nul.

• En particulier, $1 = \sum_{j=0}^{n} L_j$ et $X = \sum_{j=0}^{n} x_j L_j$, par unicité du polynôme de Lagrange.

Q4. Écrivons sous forme de puissances croissantes l'unique polynôme de degré 2 qui passe par les trois points $(0, 1)$, $(1, -3)$ et $(2, 2)$.
On a : $P = 1 \times L_0 - 3 \times L_1 + 2 \times L_2$, c'est-à-dire :

$$P = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 - 3\left(2X - X^2\right) - X + X^2 = 1 - \frac{17}{2}X + \frac{9}{2}X^2.$$

Partie II : Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **polynôme de Tchebychev de degré** n la fonction définie par

$$T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(n \arccos x).$$

Q1. Calculons T_0, T_1 et T_2.
Rapidement, on a : $T_0 = 1$ et $T_1 = \cos(\arccos x) = x$. Puis :

$$T_2 = \cos(2 \arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Q2. On pose $\alpha = \arccos x$, en remarquant que $T_n(x) = \mathfrak{Re}\left(e^{in\alpha}\right)$, montrons que T_n est un polynôme de degré exactement n.

$T_n(x)$ vaut :

$$\mathfrak{Re}\ \left(e^{in\alpha}\right) = \mathfrak{Re}\ (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = \mathfrak{Re}\ ((\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n)\,.$$

On pose $\alpha = \arccos x$ et on demande à Abraham de Moivre de l'aide !. Puis comme $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, (On utilise $i^{2j} = (-1)^j$) :

$$T_n(x) = \mathfrak{Re}\ \left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right) = \mathfrak{Re}\ \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}i^k(\sqrt{1-x^2})^k\right).$$

Ce qui donne $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}i^k(\sqrt{1-x^2})^k$.

On arrange en posant $k = 2j$ et $T_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}x^{n-2j}(x^2-1)^j$.

Ce qui montre que T_n est bien un polynôme de degré au plus n.

Par ailleurs, on voit que le coefficient devant x^n est $\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}$ qui est non nul (donc T_n est bien de degré n et on peut montrer en développant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ avec la formule du binôme et en faisant la demi-somme des deux égalités obtenues que le coefficient dominant est 2^{n-1}, ce que l'on retrouve à la question suivante.

Q3. • Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x)$.

On repart de $\alpha = \arccos x$ et des deux égalités :
$\cos((n+2)\alpha) = \cos((n+1)\alpha)\cos\alpha - \sin((n+1)\alpha)\sin\alpha$.
$\cos(n\alpha) = \cos((n+1)\alpha)\cos\alpha + \sin((n+1)\alpha)\sin\alpha$.
On somme ces deux égalités.

$$\cos((n+2)\alpha) + \cos(n\alpha) = 2\cos((n+1)\alpha)\cos\alpha.$$

On revient à la définition de T_n : $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.

• On voit que si $T_n(x)$ a pour terme de plus haut degré $a_n x^n$,

$$a_{n+2}x^{n+2} = 2a_{n+1}x^{n+2},$$

en utilisant la dernière égalité.
Comme $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, par récurrence immédiate, $a_n = 2^{n-1}$. (Et $\deg T_n = n$.)

Q4. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, montrons que T_n admet exactement n racines simples : $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour tout k entier de $[\![0, n-1]\!]$.

Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, si a est une racine de T_n alors $T_n(a) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\arccos a) = 0$.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\arccos a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. C'est identique à dire qu'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $n\arccos a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Et donc : $a = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$. (Car $\arccos a \in]0, \pi[$.)
Si l'on note $x_0, ..., x_{n-1}$ les n valeurs distinctes que prend la racine a, comme T_n est de degré au plus n, ces valeurs sont exactement les racines de T_n.

Q5. On a toujours $n \in \mathbb{N}^\star$. On commence par remarquer que $|T_n(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

• Cherchons les extrema de T_n. On dérive T_n en supposant $x \in]-1, 1[$.

$$T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x).$$

Pour $k=0$ et $k=n$, z_k vaut ± 1 et $T_n(\pm 1)=\pm 1$, ce sont des extrema situés en bord d'intervalle de définition.

Les valeurs qui annulent cette dérivée sont ainsi les réels a qui annulent la quantité $\sin(n \arccos a) = 0$.

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n \arccos a = k\pi$.

Comme $\arccos a \in]0, \pi[$ (pour que $x^2 \neq 1$), on restreint k à $[\![1, n-1]\!]$.

Ainsi, il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $a = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Bilan : les valeurs qui annulent T_n' sont $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Il est clair que la dérivée T_n' change de signe autour des points où elle s'annule qui sont des extrema locaux. On montre plus loin qu'ils sont globaux.

- Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$T_n(z_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) = \cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Ainsi en y ajoutant ± 1, les extrema de T_n sont les points $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

- On en déduit au passage que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

Q6. On considère l'application $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

a. $\langle\, ,\, \rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$ car pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P, Q\rangle$ est une combinaison linéaire d'intégrales généralisées de la forme $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, où $n \in \mathbb{N}$. Pour x tendant vers -1^+, posons $x = -1+h$ alors $\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{(-1+h)^n}{\sqrt{2h-h^2}} \sim_{h\to 0} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2h}}$. Et $\displaystyle\int_0^a \frac{(-1)^n}{\sqrt{2h}}\, dh$ converge (pour $a>0$). C'est le même processus pour $x \to 1^-$.

b. Montrons que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- **Symétrie et bilinéarité :** elles résultent des propriétés de linéarité de l'intégrale.
- **Positivité :** si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \geqslant 0$.
- **Caractère défini :** comme P^2 et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sont positives et continues sur $]-1,1[$, il en va de même pour leur produit et $\langle P, P\rangle = 0 \Longrightarrow \forall t \in]-1,1[\,,\ P(t) = 0$.

Comme un polynôme qui s'annule sur un intervalle vaut 0, $\langle P, P\rangle = 0 \Longrightarrow P = 0$.

c. Montrons que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour $\langle\, ,\, \rangle$.

Pour tout n et m entiers,

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\arccos x)\cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(nt)\cos(mt)}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\,(-\sin t)\, dt,$$

en posant $x = \cos t$. Cela donne :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \langle T_n, T_m\rangle = \int_0^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt.$$

Puis : $\cos(nt)\cos(mt) = \dfrac{1}{2}\left(\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)\right)$. On distingue plusieurs cas.

- **Cas** $n = m \neq 0$

Alors $\langle T_n, T_n \rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(2nt) + 1\right)\, dt = \frac{\pi}{2}$.

- **Cas** $n \neq m$, $n \neq 0$

Alors $\langle T_n, T_m \rangle = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((n+m)t)}{n+m} + \dfrac{\sin((n-m)t)}{n-m}\right] = 0$.

- **Cas** $n = m = 0$

Alors $\langle T_n, T_n \rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 + 1\right)\, dt = \pi$.

Conclusion : La famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}T_0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_n,\ n \in \mathbb{N}^{\star}\right)$ est orthonormale.

Partie III : Optimisation des points d'interpolation de Lagrange

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $(x_0, ..., x_n) \in [a,b]^{n+1}$ **tous distincts** et P_n l'unique polynôme de degré au plus n qui satisfait à $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

On pose : $\phi : [a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$.

On pose aussi : $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$ fixé, $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - P_n(t) - \phi(x)\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$.

a. Justifions que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et s'annule aux $(n+2)$ points $x_0, ..., x_n, x$ de $[a,b]$.

$g : t \mapsto f(t) - P_n(t) - \phi(x)\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ par somme de produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur (Par définition de P_n.) $[a,b]$.

Puis pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $g(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) + 0 = 0$ et on a aussi, pour finir,

$$g(x) = f(x) - P_n(x) - (f(x) - P_n(x)) = 0.$$

b. Démontrons qu'il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$.

D'après ce qui précède, g s'annule au moins en $(n+2)$ valeurs distinctes ce qui crée $n+1$ sous-intervalles (de réunion dans $[a,b]$), d'extremintés ces $n+2$ valeurs.

D'après le théorème de Rolle, comme g s'annule aux extrémités de chacun de ces sous-intervalles, il existe dans l'ouvert de chacun de ces sous-intervalles un réel annulant la dérivée g'. On a ainsi trouvé $n+1$ points distincts annulant g'. Ces points créent n nouveaux sous-intervalles dont ils sont les extrémités.

On continue à appliquer le théorème de Rolle, g' s'annule aux extrémités de chacun de ces sous-intervalles, il existe dans l'ouvert de chacun de ces sous-intervalles un réel annulant la dérivée g''. Ainsi de suite, de façon générale, pour un entier k compris entre 1 et n, on met en valeur $n+2-k$ points distincts annulant $g^{(k)}$. Ces points créent $n+2-(k+1)$ nouveaux sous-intervalles dont ils sont les extrémités. On continue à appliquer le théorème de Rolle, comme $g^{(k)}$ s'annule aux extrémités de chacun de ces sous-intervalles, il existe dans l'ouvert de chacun de ces sous-intervalles un réel annulant la dérivée $g^{(k+1)}$. Et enfin pour $k = n$, on met en valeur $n+2-n = 2$ points distincts annulant $g^{(n)}$. Et d'après Rolle, il existe un point ζ annulant $g^{(n+1)}$ et contenu dans le sous-intervalle d'extrémités ces deux points.

c. Montrons : $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$, $\exists\, \zeta \in [a,b]$, $\phi(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$.

$g^{(n+1)}(t)$ est constitué de $f^{(n+1)}(t)$ auquel on retranche $P_n^{(n+1)}(t)$ (de valeur 0 car $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$) et auquel on retranche la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de $\phi(x)\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ (par rapport à t).

Comme cette dernière fonction est un polynôme de degré $n+1$, seul son terme dominant nous intéresse.
Il vaut $\phi(x)t^{n+1}$ et sa dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ est $(n+1)!\phi(x)$.

Alors (car $g^{(n+1)}(\zeta)=0$) :

$$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!\phi(x)\Rightarrow f^{(n+1)}(\zeta)-(n+1)!\phi(x)=0.$$

Ce qui donne bien : $\phi(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$.

d. Montrons : $\forall x\in[a,b],\ |f(x)-P_n(x)|\leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

En reprenant la définition de $\phi(x)$, pour tout $x\in[a,b]\setminus\{x_0,...,x_n\}$, $\phi(x)=\dfrac{f(x)-P_n(x)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$.

Et en rapprochant de la question précédente, $\dfrac{f(x)-P_n(x)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}=\dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$.

Ce qui donne toujours : $\forall x\in[a,b]\setminus\{x_0,...,x_n\}$, $f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

(Et alors ζ est quelconque.) On voit que cette dernière égalité est aussi valable pour $x=x_i$ pour tout entier i appartenant à $[\![0,n]\!]$. On en déduit :

$$\forall x\in[a,b],\ |f(x)-P_n(x)|\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Q2. L'objectif est de choisir les points d'interpolation de Lagrange $x_0,...,x_n$ de telle manière que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\leqslant\sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.
Nous allons montrer que les points d'interpolation qui vérifient cette propriété sont les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1}. Posons alors $\dfrac{1}{2^n}T_{n+1}=\overline{T}_{n+1}$ (et donc $\overline{T}_{n+1}$ est normalisé), considérons $Q\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ **normalisé** quelconque et posons :

$$\forall j\in[\![0,n]\!],\ x_j=\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)\text{ et }\forall k\in[\![0,n+1]\!],\ z_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

a. Montrons que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right|=\frac{1}{2^n}$.

Car $\overline{T}_{n+1}$ est normalisé et $x_0,...,x_n$ sont ses racines : D'après plus haut, $\overline{T}_{n+1}(x)=\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ et donc :

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|=\sup_{x\in[-1,1]}\left|\overline{T}_{n+1}(x)\right|=\frac{1}{2^n}\sup_{x\in[-1,1]}|T_{n+1}(x)|.$$

Et on peut conclure par $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|=1$.

b. Montrons $\deg\left(Q-\overline{T}_{n+1}\right)\leqslant n$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\left(Q-\overline{T}_{n+1}\right)(z_k)=Q(z_k)-\dfrac{(-1)^k}{2^n}$.

- Comme $Q\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ est normalisé et $\overline{T}_{n+1}\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ normalisé, $\deg\left(Q-\overline{T}_{n+1}\right)\leqslant n$.
- Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$\left(Q-\overline{T}_{n+1}\right)(z_k)=Q(z_k)-\overline{T}_{n+1}(z_k)=Q(z_k)-\dfrac{1}{2^n}T_{n+1}(z_k)=Q(z_k)-\dfrac{(-1)^k}{2^n}$.

c. Supposons que $\dfrac{1}{2^n} > \sup\limits_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$.
Montrons que si k est pair, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) < 0$ et si k est impair, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) > 0$.
En déduire qu'il y a $(n+1)$ changements de signe pour $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)$.
Établir alors une contradiction. Conclure.
Supposons donc **l'inégalité** (I) $\dfrac{1}{2^n} > \sup\limits_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$ et $k \in [\![0, n+1]\!]$.

• ***On suppose que k est pair***
Alors $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) = Q(z_k) - \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^n} = 0$.

• ***On suppose que k est impair***
Alors $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) = Q(z_k) + \dfrac{1}{2^n} > -\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = 0$.

• ***Synthèse***
On a alors pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k).\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_{k+1}) < 0$.
La fonction $Q - \overline{T}_{n+1}$ change de signe $(n+1)$ fois. Par continuité, $Q - \overline{T}_{n+1}$ a donc au moins $n+1$ racines et étant un polynôme de degré au plus n, c'est le polynôme nul. Et donc $Q = \overline{T}_{n+1}$. Ce qui est contradictoire avec (I).

• ***Conclusion***
Alors (I) **est fausse** et : $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \sup\limits_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$. On peut alors dérouler.

$$\frac{1}{2^n} = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\overline{T}_{n+1}\right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)|.$$

Remarque : On a donc prouvé ici que si l'on prend pour support d'interpolation les racines des polynômes de Tchebychev, l'écart entre f et son polynôme d'interpolation pour tout x était minimal. Ce qui va permettre d'éliminer ce que l'on appelle les effets de bords, voir plus loin.

Q3. Montrons que si $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v$, on a l'équivalence : $v \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in [a,b]$.
En déduire les réels $x_0, ..., x_n$ de $([a,b])^n$ qui vérifient $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.
On écrit : $-1 \leqslant v \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{a-b}{2} \geqslant \dfrac{a-b}{2}v \geqslant \dfrac{a-b}{2}$
$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2} \geqslant \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v \geqslant \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2} \Leftrightarrow b \geqslant x \geqslant a$. (Ne pas oublier que $a - b < 0$.)

Puis, partons de **(II)** : $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |Q(x)|$, pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.
En posant $x_i = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$x - x_i = \frac{a-b}{2}(v - v_i)$$

et donc : $\prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i) = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^{n+1} \prod\limits_{i=0}^{n}(v - v_i)$.
Or, si l'on pose $Q(x) = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^{n+1} Z(v)$, comme Q est normalisé dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (de variable x), Z est normalisé dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (de variable v). En effet, le terme dominant de Q est x^{n+1} soit $\left(\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v\right)^{n+1}$ de terme dominant $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^{n+1} v^{n+1}$.

En divisant par $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^{n+1}$, **(II)** est ramené à :

$$\sup_{v\in[-1,1]}\left|\prod_{i=0}^{n}(v-v_i)\right| \leqslant \sup_{v\in[-1,1]}|Z(v)|$$

pour tout polynôme Z normalisé de degré $n+1$. Ainsi, pour optimiser le support d'interpolation $(x_0, ..., x_n)$ valeurs prises dans $[a,b]$, on détermine les racines du polynôme de Tchebychev d'ordre $n+1$ que l'on nomme $v_0, ..., v_n$ et on prend pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v_i$.

Partie IV : Matrice de Vandermonde

Soit $n+1$ réels x_0, x_1, ..., x_n et considérons $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto (P(x_0), ..., P(x_n))$.
On note $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ et $\mathcal{C} = (e_1 = (1,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$, ..., $e_{n+1} = (0,...,0,1))$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q1. Vérifions que Φ est une application linéaire.
Si $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$,

$$\Phi(P+aQ) = ((P+aQ)(x_0), ..., (P+aQ)(x_n)) = (P(x_0), ..., P(x_n)) + a(Q(x_0), ..., Q(x_n))$$

ce qui donne : $\Phi(P+aQ) = \Phi(P) + a\Phi(Q)$.

Q2. On appelle dans la suite **matrice de Vandermonde** $V(x_0, ..., x_n)$ associée à $(x_0, ..., x_n)$ la matrice représentative de Φ, les espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ étant munis de leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Explicitons la matrice $V(x_0, ..., x_n)$.

On a immédiatement : $V(x_0, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

On suppose dans la suite de la partie IV que $x_0, x_1, ..., x_n$ sont **tous distincts**.

Q3. Calculons pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\Phi(Lj)$, où $\mathcal{B}' = (L_0, ..., L_n)$ est la base des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $(x_0, x_1, ..., x_n)$.

Immédiatement, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\Phi(Lj) = (L_j(x_0), ..., L_j(x_n)) = e_{j+1}$.
On en déduit que la matrice représentative de Φ, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ étant munis de leurs bases respectives $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ est la matrice I_{n+1}.

b. Écrivons une relation entre $V(x_0, x_1, ..., x_n)$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, où $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base des polynômes interpolateurs de Lagrange.

D'après la formule de transformation d'une matrice par changement de base de l'espace vectoriel de départ (l'espace vectoriel d'arrivée conserve sa base canonique) : $I_{n+1} = I_{n+1}V(x_0, ..., x_n)P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, où $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base des polynômes interpolateurs de Lagrange. On a la conséquence suivante :

Dans le cas où les réels x_0, x_1, ..., x_n sont **tous distincts**, la matrice de Vandermonde $V(x_0, ..., x_n)$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(x_0, ..., x_n)$, c'est la matrice écrite par colonnes $\begin{pmatrix} L_0 & L_1 & \dots & L_n \end{pmatrix}$.

c. Application numérique : Exprimons $(V(0,1,2))^{-1}$ en utilisant **IV-3-b** et **I-1**.
On sait que $(V(0,1,2))^{-1} = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 & L_2 \end{pmatrix}$.
Et on utilise : $L_0 = 1 - \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{2}X^2, L_1 = 2X - X^2, L_2 = -\dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{2}X^2$.

$$(V(0,1,2))^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Celui qui ne me croît pas peut vérifier que $V(0,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ en effectuant leur produit !

Partie V : Déterminant de Vandermonde et applications

Soit $n \geqslant 1$ et $n+1$ réels x_0, x_1, ..., x_n, on appelle ***déterminant de Vandermonde*** associé à $(x_0, x_1, ..., x_n)$ que l'on notera $\Delta(x_0, ..., x_n)$, le déterminant d'ordre $n+1$: $\mathsf{Det}\ (V(x_0, x_1, ..., x_n))$.
Les quatre premières questions de cette partie sont consacrées à retrouver la formule :

$$\forall n \geqslant 1, \forall (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Delta(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$P_p(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{p-1} & X \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{p-1}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^p & x_1^p & \cdots & x_{p-1}^p & X^p \end{vmatrix}.$$

$\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_p) = P_p(x_p)$ est donc le déterminant de Vandermonde associé à $(x_0, ..., x_p)$.
On peut déjà remarquer que prendre $V(x_0, ..., x_n)$ ou $(V(x_0, ..., x_n))^T$ est pareil pour le passage aux déterminants et :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

Q1. S'il existe (i, j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$ et $x_i = x_j$, montrons $\Delta(x_0,\ x_1,\ \cdots, x_p) = 0$.
S'il existe un couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$ et $x_i = x_j$, alors les colonnes d'ordre i et j de $V(x_0, \dots, x_p)$ sont égales donc $\Delta(x_0, \cdots, x_p) = 0$.

Q2. Si les x_i sont **distincts**, montrons que $P_p(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, de racines $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$ et de coefficient dominant $\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})$.
Si les x_i sont distincts : On développe $P_p(X)$ par rapport à sa dernière colonne.

$$P_p(X) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{1+i} \Delta_{i,p} X^{i-1},$$

où $\Delta_{i,p}$ est le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ obtenue en enlevant à la matrice initiale la dernière colonne et la $i^{\text{ème}}$ ligne.
$P_p(X) \in \mathbb{R}_p[X]$ de coefficient dominant (si celui-ci n'est pas nul) :

$$\Delta_{p-1,p} = \Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}).$$

Q3. Déduisons en que *dans tous les cas*
$\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_p) = (x_p - x_0)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1})\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})$.
On constate que : $P_p(x_k) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$.
(Par identité des colonnes C_k et C_p de ce déterminant.)
Il en résulte que, si $\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \neq 0$, alors :

$P_p(X) = \Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(X - x_k)$.

Si $(x_k)_{0\leqslant k \leqslant p}$ sont distincts, $\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_p) = P_p(x_p) = \Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(x_p - x_k) \neq 0$.
La relation précédente s'étend au cas où les (x_k) ne sont pas distincts sous la forme $0 = 0$.
Q4. Montrons alors : $\forall n \geqslant 1, \forall (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Delta(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$.

Pour $p \in [\![1, n]\!]$, appelons D_p la propriété

$$\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_p) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant p}(x_j - x_i).$$

D_1 se vérifie aisément.
Supposons D_{p-1} vraie pour $p \in [\![2, n]\!]$, alors, en utilisant la propriété **3**.
Le principe de récurrence établit la formule pour tout $n \geqslant 1$ et tout n-uplet $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

$$\begin{aligned}\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_p) &= (x_p - x_0)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1})\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \\ &= (x_p - x_0)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1}) \prod_{0\leqslant i<j\leqslant p-1}(x_j - x_i) \\ &= \prod_{0\leqslant i<j\leqslant p}(x_j - x_i).\end{aligned}$$

alors D_p est vraie.

Q5. Application 1. Ici $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^\star)^3$, soit $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Après mise en facteur de a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} respectivement dans les première, deuxième, troisième lignes :

$$\begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\Delta(a^2, b^2, c^2) = \frac{1}{abc}(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)(c^2 - a^2).$$

Q6. Application 2. Ici $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, soit $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Par développement de $\Delta(a, b, c, x)$ par rapport à la troisième colonne, on trouve que le coefficient de x^2 dans le polynôme $\Delta(a, b, c, x)$ est :

$$(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}.$$

Par ailleurs, $\Delta(a, b, c, x) = \Delta(a, b, c)(x - a)(x - b)(x - c)$ dont le coefficient de x^2 est

$$-(a + b + c)\Delta(a, b, c).$$

Par identification :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)(c - a)(c - b)(b - a).$$

Q7. Application 3. Soient $n \geqslant 3$ un entier naturel, $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$ une famille de n éléments de $\mathbb{K}$ **tous distincts** et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_k par : $x \mapsto e^{\gamma_k x}$.

a. Soient $(m_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ un n-uplet de scalaires, et $\Psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\psi_k$.

Calculons les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n-1$.

On suppose que les γ_k sont distincts deux à deux.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ par : $x \mapsto e^{\gamma_k x}$.

Considérons $(m_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ un n-uplet de scalaires et : $\Psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\psi_k$.

Calculons les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n-1$. L'application ψ_k est bien entendu de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car est la composée de l'application polynomiale $x \mapsto \gamma_k x$ qui est classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, et de l'exponentielle de classe C^∞ sur $\mathbb{K}$.
On a alors par une récurrence facile à montrer :

$$\forall l \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_k^{(l)}(x) = \gamma_k^l e^{\gamma_k x} = \gamma_k^l \psi_k(x).$$

Enfin, la fonction Ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme finie de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Puis : $\forall l \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi^{(l)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\psi_k^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\gamma_k^l\psi_k(x)$.

b. Montrons que la famille $(\psi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Montrer ici que la famille $(\psi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ revient à montrer que Ψ est nulle.

Il s'agit de montrer que si $(m_0, \ldots, m_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\psi_k = 0$ alors pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, , $m_k = 0$.

Introduisons $\Psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\psi_k$, où $(m_0, \ldots, m_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

Il est donc équivalent d'écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\psi_k = 0$ et $\Psi = 0$.

On utilise maintenant la question **V-7-a**. Supposons $\Psi = 0$.
Les dérivées successives de Ψ sont identiquement nulles (comme Ψ).

Il reste à utiliser avec $x = 0$ la formule :

$\forall l \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi^{(l)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\gamma_k^l\psi_k(x)$.

Utilisons aussi le fait que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\psi_k(0) = 1$.

$$\forall l \in [\![0, n-1]\!], \quad \Psi^{(l)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\gamma_k^l\psi_k(0) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\gamma_k^l.$$

Et donc : $\forall l \in [\![0, n-1]\!]$, $\left[\Psi^{(l)} = 0 \Rightarrow \Psi^{(l)}(0) = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\gamma_k^l = 0\right]$.

La matrice de Vandermonde est inversible car les γ_i sont distincts. Ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} m_0 + m_1 + ... + m_{n-1} & = & 0 \\ m_0\gamma_0 + m_1\gamma_1 + ... + m_{n-1}\gamma_{n-1} & = & 0 \\ m_0\gamma_0^2 + m_1\gamma_1^2 + ... + m_{n-1}\gamma_{n-1}^2 & = & 0 \\ \ldots & = & 0 \\ m_0\gamma_0^{n-1} + m_1\gamma_1^{n-1} + ... + m_{n-1}\gamma_{n-1}^{n-1} & = & 0 \end{array}\right. .$$

En utilisant la notation $V(\gamma_0, ..., \gamma_{n-1})$ pour désigner la **matrice dite de Vandermonde** associée à $(\gamma_0, ..., \gamma_{n-1})$, les n égalités précédentes s'écrivent alors matriciellement :

$$[V(\gamma_0, ..., \gamma_{n-1})]^T \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

Comme les scalaires γ_i sont tous distincts, $\mathsf{Det}\ (V(\gamma_0, ..., \gamma_n))$ est non nul, et donc $V(\gamma_0, ..., \gamma_{n-1})$ est une matrice inversible. On en déduit :

$$[V(\gamma_0, ..., \gamma_{n-1})]^T \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \Rightarrow \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

On a bien : $\forall l \in [\![0, n-1]\!], , m_k = 0.$ $q.e.d$