

Légende code couleur :

Math

Physique

SI

Indéterminé

# Modélisation CCINP TSI 2020

## Générateur inertiel toroïdal

### Partie I : Présentation

I.1 : Contexte général

I.2 : Analyse de l'accélération humaine

**Q1)**

$a_{bras} \approx 8g$  Fréquence du fondamental  $f_f$ :  $f_{bras} \approx 2.5Hz$

$a_{poitrine} \approx 5.5g$   $f_{poitrine} \approx 2.5Hz$

$a_{hanche} \approx 7g$   $f_{hanche} \approx 2.5Hz$

Remarque : Le niveau de cette dernière accélération  $a_{hanche}$  est peu cohérent avec la courbe temporelle d'accélération (et avec la conclusion de la Q3))

**Q2)**

La fréquence d'un choc (donc d'une foulée) est de 2.5Hz, soit une période de 0.4s.

La vitesse étant de 6.4 km/h, soit 1.78 m/s, la distance parcourue est de 0.71 m. Cette distance est cohérente avec la foulée d'une course lente.

**Q3)**

D'après la figure 3, en prenant comme origine des angles la verticale descendante :

$\varphi_{mini} \approx -65^\circ$  et  $\varphi_{maxi} \approx +25^\circ$  soit une amplitude angulaire  $\Delta\varphi \approx 90^\circ$

La récupération d'énergie est de nature inertielle, donc les valeurs d'accélération doivent être importantes. La figure 4 montre que les accélérations au niveau du bras (membre mobile) sont plus importantes, du fait de son mouvement de balancier. On peut cibler d'autres parties mobiles (poignet, genou, pied,...)

### Partie II : Principe de la conversion d'énergie

II.1 : Principe du couplage électromécanique

**Q4)**

Lors du déplacement de la bille magnétique, le circuit fermé (induit) embrase un flux magnétique  $\Phi$  variable, puisque la distance  $z$  varie. Il y a donc création d'une force électromotrice induite  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Le circuit associé à la bobine est fermé, de résistance ohmique  $R_C$ , d'où la création d'un courant  $I$ .

Quand la bille magnétique (on considère  $\vec{m}$  dirigé vers  $+e_z$ ) s'approche, elle approche un pôle nord, il doit donc se créer un pôle nord pour la spire du côté de la bille afin que l'induction produise des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont données naissance (loi de Lenz). Cela correspond à un champ  $\vec{B}$  est dirigé vers  $-e_z$  et avec la règle de la main droite à un courant  $I < 0$

II.2 : Etude de la conversion d'énergie mécano-électrique

**Q5)**

Pour une spire :  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  avec  $\Phi = \frac{\mu_0 m R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{3/2}}$  d'où  $e = -\frac{\mu_0 m R_b^2}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2\dot{z}z}{(z^2 + R_b^2)^{5/2}}$

Pour N Spires  $e_{ind} = \frac{3\mu_0 m R_b^2 N}{2} \frac{\dot{z}z}{(z^2 + R_b^2)^{5/2}}$  et  $I = \frac{e_{ind}}{R_C}$  et  $I = \frac{3\mu_0 m R_b^2 N}{2R_C} \frac{\dot{z}z}{(z^2 + R_b^2)^{5/2}}$

$\mathcal{P}_e = e_{ind} \cdot I_{ind} = \frac{(3\mu_0 m R_b^2 N)^2}{4R_C} \frac{\dot{z}^2 z^2}{(z^2 + R_b^2)^5}$

**Q6)**Dans une conversion mécano-électrique :  $\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_m = 0$  $\mathcal{P}_m = -c_e v^2$  est la puissance mécanique convertie en puissance électrique, avec  $v = -\dot{z}$ , donc

$$-c_e \dot{z}^2 + \frac{(3\mu_0 m R_b^2 N)^2}{4R_C} \frac{\dot{z}^2 z^2}{(z^2 + R_b^2)^5} = 0 \text{ d'où : } c_e = \frac{(3\mu_0 m R_b^2 N)^2}{4R_C} \frac{z^2}{(z^2 + R_b^2)^5}$$

Le coefficient d'amortissement dynamique  $c_e$  est directement proportionnel à la puissance mécanique convertie : plus le coefficient d'amortissement dynamique est grand, plus la puissance mécanique convertie est grande, ce que l'on recherche.

Pour augmenter  $c_e$  pour un  $z$  considéré, il faut augmenter  $m$  ou  $N$  et diminuer  $R_b$  ou  $R_C$ .

### II.3 : Etude de l'énergie électrique produite

**Q7)**Pour tout  $z$  :

$$\mathcal{P}_e(z) = \frac{Az^2}{(z^2 + R_b^2)^5} = \mathcal{P}_e(-z) \text{ donc } \mathcal{P}_e \text{ est paire. Ses variations seront symétriques par rapport à la droite}$$

d'équation  $z = 0$ .**Q8)**

$$\frac{d\mathcal{P}_e}{dz}(z) = \frac{A2z \cdot (z^2 + R_b^2)^5 - Az^2 \cdot 5 \cdot 2z \cdot (z^2 + R_b^2)^4}{(z^2 + R_b^2)^{10}} = \frac{2Az^3 + A2zR_b^2 - 10Az^3}{(z^2 + R_b^2)^6} = 2Az \cdot \frac{R_b^2 - 4z^2}{(z^2 + R_b^2)^6}$$

Le signe de  $\frac{d\mathcal{P}_e}{dz}(z)$  est celui de  $z(R_b^2 - 4z^2)$ , donc sur  $\mathbb{R}_+$ , celui de  $(R_b^2 - 4z^2)$

$\frac{d\mathcal{P}_e}{dz}$  s'annule lorsque  $z = 0$  ou lorsque  $R_b^2 - 4z^2 = 0$  soit  $z = \frac{R_b}{2}$  ( $z > 0$ ).

$z$	0		$\frac{R_b}{2}$		$+\infty$
$R_b^2 - 4z^2$	0	+	0	-	
$\frac{d\mathcal{P}_e}{dz}(z)$	0	+	0	-	

$\mathcal{P}_e$  est donc croissante sur  $\left[0; \frac{R_b}{2}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{R_b}{2}; +\infty\right]$ .

Donc  $\mathcal{P}_e$  admet un maximum global sur  $\mathbb{R}_+$  pour  $z = \frac{R_b}{2}$

$$\mathcal{P}_e\left(\frac{R_b}{2}\right) = \frac{A \frac{R_b^2}{4}}{\left(\frac{R_b^2}{4} + R_b^2\right)^5} = \frac{A \frac{R_b^2}{4}}{\left(\frac{5R_b^2}{4}\right)^5} = \frac{A4^5 R_b^2}{45^5 R_b^{10}} = \frac{A4^4}{5^5 R_b^8} \text{ donc la valeur du maximum est } \frac{256A}{3125R_b^8}$$

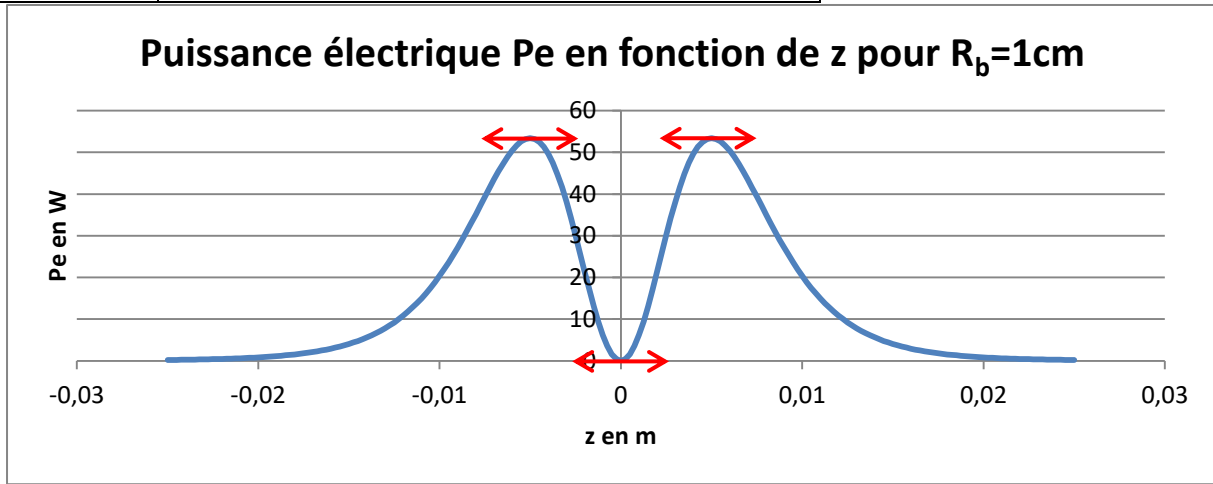
**Q9)**

$z^2 + R_b^2 \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} z^2$ , donc  $(z^2 + R_b^2)^5 \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} z^{10}$ , donc  $\mathcal{P}_e(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{z^8}$ . Finalement :  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_e(z) = 0$

La courbe de  $\mathcal{P}_e$  a pour asymptote la droite d'équation  $y = 0$  en  $+\infty$ .

**Q10)**

$z$	0	$\frac{R_b}{2}$	$+\infty$
$\frac{d\mathcal{P}_e}{dz}$	0	+	0
$\mathcal{P}_e$	0	$\frac{256A}{3125R_b^8}$	0



**Q11)**

$\mathcal{P}_e$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz$  n'est impropre qu'en  $+\infty$ .

Or d'après Q9),  $\mathcal{P}_e(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{z^8}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{A}{z^8} dz$  est une intégrale de Riemann convergente (car  $8 > 1$ ), donc par le critère sur les équivalents (fonctions positives),  $\int_1^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz$  est convergente, donc  $\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz$  est également convergente.

De plus,  $\mathcal{P}_e$  est paire, donc  $\int_{-\infty}^0 \mathcal{P}_e(z) dz$  converge aussi, donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz$  est également convergente.

**Q12)**

La fonction  $u \mapsto R_b \tan u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et strictement croissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , avec  $R_b \tan 0 = 0$  et

$$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} R_b \tan u = +\infty.$$

$$z = R_b \tan u \text{ or } \tan' u = \frac{1}{\cos^2 u} \text{ d'où : } dz = \frac{R_b du}{\cos^2 u}$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_b^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{R_b du}{\cos^2 u}}{(R_b^2 \tan^2 u + R_b^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R_b du}{R_b^{2n} \cos^2 u (\tan^2 u + 1)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{R_b^{2n-1} \cos^2 u \left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^n}$$

$$I_n = \frac{1}{R_b^{2n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(n-1)} du$$

**Q13)**

Intégration par parties :  $\int wv' = [wv] - \int w'v$ .

En choisissant  $w(u) = (\cos u)^{2n+1}$  et  $v(u) = \sin u$ , on a :  $w'(u) = (2n+1)(-\sin u)(\cos u)^{2n}$  et  $v'(u) = \cos u$ .

Donc, en remplaçant dans l'intégration par parties :

$$\int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n+1} \cos u du = \left[ (\cos u)^{2n+1} \sin u \right]_0^{+\frac{\pi}{2}} - \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (2n+1)(-\sin u)(\cos u)^{2n} \sin u du$$

$$\int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(n+1)} du = \left( \left( \cos \frac{\pi}{2} \right)^{2n+1} \sin \frac{\pi}{2} - (\cos 0)^{2n+1} \sin 0 \right) + \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (2n+1)(\cos u)^{2n} \sin^2 u du$$

$$\int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(n+1)} du = 0 + (2n+1) \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} (1 - \cos^2 u) du = (2n+1) \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} du - (2n+1) \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(n+1)} du$$

Or  $W_n = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} du$  et  $W_{n+1} = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(n+1)} du$ , donc :  $W_{n+1} = (2n+1)W_n - (2n+1)W_{n+1}$

$$(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n \quad \text{donc : } W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$$

**Q14)**

$$W_0 = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^0 du = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} du = +\frac{\pi}{2}$$

Montrons par récurrence la proposition  $Q(n) : W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \cdot \pi$

**Initialisation :**  $\frac{(2 \cdot 0)!}{2^{2 \cdot 0 + 1} (0!)^2} \cdot \pi = \frac{1}{2^1 \cdot 1} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$  donc  $Q(0)$  est vraie.

**Hérédité :** supposons que pour  $k$  fixé,  $Q(k)$  est vraie. Alors, d'après la question précédente :

$$W_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k+1} (k!)^2} \cdot \pi$$

$$W_{k+1} = \frac{2k+2}{2k+2} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k+1} (k!)^2} \cdot \pi$$

$$W_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{2^2 (k+1)^2 \cdot 2^{2k+1} (k!)^2} \cdot \pi$$

$$W_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{2^{2(k+1)+1} ((k+1)!)^2} \cdot \pi$$

Donc  $Q(k) \Rightarrow Q(k+1)$

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \cdot \pi$

**Q15)**

$$\mathcal{E}_e^T = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz = 2 \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_e(z) dz = 2 \int_0^{+\infty} \frac{Az^2}{(z^2 + R_b^2)^5} dz$$

$$2A(I_4 - R_b^2 I_5) = 2A \left( \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_b^2)^4} - R_b^2 \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_b^2)^5} \right) = 2A \left( \int_0^{+\infty} \frac{(z^2 + R_b^2) dz}{(z^2 + R_b^2)^5} - R_b^2 \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_b^2)^5} \right)$$

$$2A(I_4 - R_b^2 I_5) = 2A \int_0^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + R_b^2)^5} = \mathcal{E}_e^T \text{ Donc } \mathcal{E}_e^T = 2A(I_4 - R_b^2 I_5)$$

$$\mathcal{E}_e^T = 2A(I_4 - R_b^2 I_5) = 2A \left( \frac{1}{R_b^{2 \cdot 4 - 1}} \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(4-1)} du - R_b^2 \cdot \frac{1}{R_b^{2 \cdot 5 - 1}} \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(5-1)} du \right)$$

$$\mathcal{E}_e^T = 2A \left( \frac{1}{R_b^7} \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(3)} du - \frac{1}{R_b^7} \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2(4)} du \right). \text{ Donc : } \mathcal{E}_e^T = \frac{2A}{R_b^7} (W_3 - W_4)$$

**Q16)**

$$W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \cdot \pi \text{ donc } W_3 = \frac{(2 \cdot 3)!}{2^7 (3!)^2} \cdot \pi = \frac{6!}{2^7 (3!)^2} \cdot \pi = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2^7 (3 \times 2 \times 1)(3 \times 2 \times 1)} \cdot \pi = \frac{6 \times 5 \times 4}{2^7 (3 \times 2 \times 1)} \cdot \pi = \frac{5 \times 4}{2^7} \cdot \pi$$

$$W_3 = \frac{5}{2^5} \cdot \pi$$

$$\mathcal{E}_e^T = \frac{2A}{R_b^7} (W_3 - W_4), \text{ avec } W_4 = W_3 \cdot \frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 3 + 2}$$

$$\mathcal{E}_e^T = \frac{2A}{R_b^7} W_3 \left( 1 - \frac{7}{8} \right) = \frac{A}{4R_b^7} W_3 = \frac{A}{4R_b^7} \cdot \frac{5}{2^5} \cdot \pi = \frac{5A\pi}{2^7 R_b^7} \text{ donc : } \mathcal{E}_e^T = \frac{5A\pi}{128R_b^7}$$

**II.4 : Couple d'induction****Q17)**

La position d'équilibre correspond à l'annulation de la dérivée de l'énergie potentielle.

La position d'équilibre stable correspond à un puits de potentiel (dérivée de l'énergie potentielle nulle et énergie potentielle minimale)

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ind}(G) = -\|m\| \cdot \|\vec{B}_{ind}(G)\| \cdot \cos \beta = -m \cdot \frac{\mu_0 I R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{3/2}} \cdot \cos \beta$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta}(\beta) = m \cdot \frac{\mu_0 I R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{3/2}} \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta} \text{ s'annule pour } \beta = 0 \left( E_p = -m \cdot \frac{\mu_0 I R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{3/2}} \right) \text{ et pour } \beta = \pi \left( E_p = +m \cdot \frac{\mu_0 I R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{3/2}} \right)$$

Les positions d'équilibre sont donc atteintes pour  $\beta = 0(\pi)$ .

Les positions d'équilibre stable sont donc atteintes pour  $\beta = 0(2\pi)$ .

**Q18)**

$$\vec{C}_{ind}(G) = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ind}(G) = \|\vec{m}\| \cdot \|\vec{B}_{ind}(G)\| \cdot \sin(-\beta) \cdot \vec{e}_y = -m \cdot \frac{\mu_0 I R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{3/2}} \cdot \sin \beta \cdot \vec{e}_y$$

Si  $\beta = 0$ , le couple d'induction subi par la bille est nul. Elle n'est donc pas susceptible de tourner et de modifier sa position angulaire.  $\beta$  peut donc rester nul et la bille peut maintenir son équilibre stable. On peut donc envisager qu'elle puisse **se déplacer** à vitesse constante sur l'induit. Mais si elle doit **rouler**, alors  $\beta$  évolue dans le temps et ne peut rester nul, donc l'équilibre ne peut pas être maintenu.

## Partie III : Comportement mécanique du générateur

### III.1 : Mouvement d'excitation

**Q19)**

Le mouvement angulaire du bras peut s'assimiler à un pendule simple, dont les oscillations sont sinusoïdales, d'où le modèle proposé.

Cependant, la question Q3 a mis en évidence que le balancement du bras ne se fait pas de manière symétrique par rapport à la verticale descendante. Une fonction sinus modulant une constante aurait sans doute été plus appropriée. On a vu que  $\varphi_{\min} \approx -65^\circ$  et  $\varphi_{\max} \approx +25^\circ$  soit une amplitude angulaire  $\Delta\varphi \approx 90^\circ$ .

On pourrait proposer le modèle affiné suivant :  $\varphi : t \mapsto 45 \sin(\omega t) - 20$

Pour conserver le modèle proposé par l'énoncé, on peut choisir :  $\varphi : t \mapsto 45 \sin(\omega t)$ , soit  $\varphi_m = 45^\circ$ .

De plus, la fréquence de 2.5Hz semble correspondre à la fréquence des impacts entre les pieds et le sol (On a un balancement du bras droit entre 2 impacts du pied droit sur le sol, et non entre 2 impacts pied droit / pied gauche sur le sol). La fréquence de balancier du bras est donc 2 fois plus petite que la fréquence des impacts au sol.

On peut prendre (l'énoncé l'impose)  $\omega = 2\pi f$ , soit  $\omega = 15.7 \text{ Hz}$ .

**Q20)**

Soit  $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

$$\left\{ \mathcal{U}_{1/0} \right\}_{o_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 \end{Bmatrix}_{b_1} = \begin{Bmatrix} 0 & l\dot{\varphi} \\ 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 \end{Bmatrix}_o \quad \text{car } \vec{V}_{o,1/0} = \vec{V}_{o_0,1/0} + \vec{OO}_0 \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \end{Bmatrix}_{b_1} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}_{b_1} = \begin{Bmatrix} l\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{b_1}$$

### III.2 : Comportement cinématique de la bille dans le tore

**Q21)**

Soit  $b_b = (\vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$

$$\vec{V}_{G,2/1} = \left( \frac{d\vec{OG}}{dt} \right)_1 = \left( \frac{dR\vec{x}_b}{dt} \right)_1 = R \left( \frac{d\vec{x}_b}{dt} \right)_1 \quad \text{or} \quad \left( \frac{d\vec{x}_b}{dt} \right)_1 = \dot{\theta} \vec{y}_b \quad \text{donc} \quad \vec{V}_{G,2/1} = R\dot{\theta} \vec{y}_b$$

Si la bille 2 roule sans glisser sur le tore 1 au point I, alors  $\vec{V}_{I,2/1} = \vec{0}$ . Or  $\vec{V}_{I,2/1} = \vec{V}_{G,2/1} + \vec{IG} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$

$$\vec{V}_{I,2/1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{b_b} + \begin{Bmatrix} -R_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{b_b} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{2/1} \end{Bmatrix}_{b_b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} + R_b \omega_{2/1} \\ 0 \end{Bmatrix}_{b_b} \quad \text{On a donc } R\dot{\theta} + R_b \omega_{2/1} = 0 \quad \text{soit : } \omega_{2/1} = -\frac{R\dot{\theta}}{R_b}$$

**Q22)**

Il faut que l'axe polaire de la bille  $\vec{m}$  soit aligné avec celui de la bobine (admettons  $\vec{y}_b$ ). Il faut donc que quelque soit le mouvement de la bille dans le tore, son orientation par rapport à l'axe du tore soit inchangée.

Soit :

- Le rail ferromagnétique est situé sur le rayon intérieur du tore : si la bille a parcouru un tour de tore, il faut qu'elle ait fait un tour sur elle-même. Il faut donc que le rayon de la bille  $R_b$  et le rayon intérieur du tore  $R_i$  soient choisis de telle manière que  $2\pi R_b = 2\pi R_i$  ou  $R_b = R_i$
- Le rail ferromagnétique est situé sur le rayon extérieur du tore : les deux directions ont des sens de rotation opposés. Il n'y a alors pas de possibilité pour optimiser la conversion d'énergie

Remarque : Je n'ai pas trouvé meilleure réponse et meilleur raisonnement. La figure 1 montre pourtant le rail sur le rayon extérieur du tore.

**III.3 : Moment d'inertie de la bille****Q23)**

$$z = \vec{GM} \cdot \vec{z}_1 = \rho \cos \beta$$

$$\text{De plus } \vec{GP} = \|\vec{GP}\| \cos \alpha \vec{x}_1 + \|\vec{GP}\| \sin \alpha \vec{y}_1. \text{ Or } \|\vec{GP}\| = \rho \sin \beta$$

$$x = \vec{GM} \cdot \vec{x}_1 = \vec{GP} \cdot \vec{x}_1 = \rho \sin \beta \cos \alpha$$

$$y = \vec{GM} \cdot \vec{y}_1 = \vec{GP} \cdot \vec{y}_1 = \rho \sin \beta \sin \alpha$$

$$\text{D'où : } M : \begin{cases} x = \rho \cos \alpha \sin \beta \\ y = \rho \sin \alpha \sin \beta \\ z = \rho \cos \beta \end{cases}$$

**Q24)**

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \alpha, \beta) = \sin \beta \cos \alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}(\rho, \alpha, \beta) = \rho \sin \beta \cos' \alpha = -\rho \sin \beta \sin \alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta}(\rho, \alpha, \beta) = \rho \cos \alpha \sin' \beta = \rho \cos \alpha \cos \beta$$

De même :

$$\frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \alpha, \beta) = \sin \beta \sin \alpha$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}(\rho, \alpha, \beta) = \rho \sin \beta \cos \alpha$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta}(\rho, \alpha, \beta) = \rho \cos \beta \sin \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho, \alpha, \beta) = \cos \beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha}(\rho, \alpha, \beta) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta}(\rho, \alpha, \beta) = -\rho \sin \beta$$

$$\text{Finalement : } J = \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha & -\rho \sin \beta \sin \alpha & \rho \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha & \rho \sin \beta \cos \alpha & \rho \cos \beta \sin \alpha \\ \cos \beta & 0 & -\rho \sin \beta \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la 3<sup>ème</sup> ligne :

$$\text{Det}(J) = \cos \beta \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} -\rho \sin \beta \sin \alpha & \rho \cos \beta \cos \alpha \\ \rho \sin \beta \cos \alpha & \rho \cos \beta \sin \alpha \end{pmatrix} - 0 + (-\rho \sin \beta) \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha & -\rho \sin \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha & \rho \sin \beta \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \text{Det} \begin{pmatrix} -\rho \sin \beta \sin \alpha & \rho \cos \beta \cos \alpha \\ \rho \sin \beta \cos \alpha & \rho \cos \beta \sin \alpha \end{pmatrix} = -\rho \sin \beta \sin \alpha \cdot \rho \cos \beta \sin \alpha - \rho \sin \beta \cos \alpha \cdot \rho \cos \beta \cos \alpha$$

$$= -\rho^2 \sin \beta \sin^2 \alpha \cos \beta - \rho^2 \cos \beta \cos^2 \alpha \sin \beta = -\rho^2 \sin \beta \cos \beta$$

$$\text{Et } \text{Det} \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha & -\rho \sin \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha & \rho \sin \beta \cos \alpha \end{pmatrix} = \sin \beta \cos \alpha \cdot \rho \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cdot \rho \sin \beta \sin \alpha$$

$$= \rho \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \rho \sin^2 \beta \sin^2 \alpha = \rho \sin^2 \beta$$

$$\text{Alors } \text{Det}(J) = \cos \beta \cdot (-\rho^2 \sin \beta \cos \beta) - \rho \sin \beta \cdot \rho \sin^2 \beta \text{ donc : } \text{Det}(J) = -\rho^2 \sin \beta$$

**Q25)**

$$I(G, \vec{z}_1) = \xi \int_0^{R_b} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi d(M, G\vec{z}_1)^2 |Det(J)| d\beta \right) d\alpha \right) d\rho$$

Avec  $|Det(J)| = \rho^2 \sin \beta$ , car  $\beta \in [0; \pi]$ , et  $d(M, G\vec{z}_1)$  la distance entre l'axe  $(G, \vec{z}_1)$  et le point M.

$$d(M, G\vec{z}_1) = \|\overline{GP}\| = \rho \sin \beta$$

$$\text{Donc : } I(G, \vec{z}_1) = \xi \int_0^{R_b} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi (\rho \sin \beta)^2 \rho^2 \sin \beta d\beta \right) d\alpha \right) d\rho = \xi \int_0^{R_b} \rho^4 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha \cdot \int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta$$

$$I(G, \vec{z}_1) = \xi \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{R_b} \cdot [\alpha]_0^{2\pi} \cdot \int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta = \xi \cdot \frac{R_b^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta$$

$$\text{Finalement : } I(G, \vec{z}_1) = \frac{2}{5} \pi \xi R_b^5 \cdot \int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta$$

**Q26)**

D'après les formules d'Euler :

$$\sin^3 x = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{(e^{ix})^3 - 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix} (e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix} e^{-ix} + 3e^{ix} e^{-2ix} - e^{-3ix}}{(2i)^3}$$

$$\sin^3 x = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{(2i)^3} = \frac{(e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{(2i)^3}$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{(2i)^2} \cdot \left( \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4} \cdot (\sin(3x) - 3\sin(x))$$

$$\text{Et : } \sin^3 x = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$$

**Q27)**

$$I(G, \vec{z}_1) = \frac{2}{5} \pi \xi R_b^5 \cdot \int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta$$

$$\text{Or : } \int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta = \int_0^\pi \frac{3\sin(\beta) - \sin(3\beta)}{4} d\beta = \frac{1}{4} \left[ -3\cos(\beta) + \frac{\cos(3\beta)}{3} \right]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta = \frac{1}{4} \left( \left( -3\cos(\pi) + \frac{\cos(3\pi)}{3} \right) - \left( -3\cos(0) + \frac{\cos(0)}{3} \right) \right) = \frac{1}{4} \left( 6 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Donc : } I(G, \vec{z}_1) = \frac{2}{5} \pi \xi R_b^5 \cdot \frac{4}{3}$$

Or le volume d'une sphère est  $V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3} \pi R_b^3$  donc sa masse est  $m_{\text{sphère}} = \xi \cdot V_{\text{sphère}}$  donc :  $m_b = \frac{4}{3} \pi R_b^3 \xi$

$$\text{Finalement : } I(G, \vec{z}_1) = \frac{2}{5} m_b R_b^2$$



## III.4 : Comportement dynamique de la bille

## Q28)

$$\{\mathcal{V}_{2/0}^g\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^g\} + \{\mathcal{V}_{1/0}^g\}$$

$$\text{Or : } \left\{ \mathcal{V}_{1/0}^g \right\}_o = \begin{pmatrix} 0 & l\dot{\varphi} \\ 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix}_{b_1} = \begin{pmatrix} 0 & l\dot{\varphi} \cos \theta \\ 0 & -l\dot{\varphi} \sin \theta + R\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix}_{b_b}$$

$$\text{car : } \overrightarrow{V_{G,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \begin{pmatrix} l\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{b_1} + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{b_b} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{b_1} = \begin{pmatrix} l\dot{\varphi} \cos \theta \\ -l\dot{\varphi} \sin \theta + R\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}_{b_b}$$

$$\text{Et (Q21) : } \left\{ \mathcal{V}_{2/1}^g \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R\dot{\theta} \\ -\frac{R\dot{\theta}}{R_b} & 0 \end{pmatrix}_{b_b}$$

$$\text{Finalement : } \left\{ \mathcal{V}_{2/0}^g \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & l\dot{\varphi} \cos \theta \\ 0 & -l\dot{\varphi} \sin \theta + R\dot{\varphi} + R\dot{\theta} \\ \dot{\varphi} - \frac{R\dot{\theta}}{R_b} & 0 \end{pmatrix}_{b_b}$$

## Q29)

$$\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = \overline{I_2(G)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + \vec{0} \text{ car } G \text{ est le Centre d'inertie de } 2.$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = \frac{2}{5} m_b R_b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{b_b} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} - \frac{R\dot{\theta}}{R_b} \end{pmatrix}_{b_b} \quad \text{donc : } \overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = \frac{2}{5} m_b R_b^2 \left( \dot{\varphi} - \frac{R\dot{\theta}}{R_b} \right) \overrightarrow{z_b}$$

$$\left\{ \mathcal{E}_{2/0} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} m_b \overrightarrow{V_{G,2/0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} \end{matrix} \right\}_{b_b} = \left\{ \begin{matrix} m_b l\dot{\varphi} \cos \theta & 0 \\ m_b (-l\dot{\varphi} \sin \theta + R\dot{\varphi} + R\dot{\theta}) & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m_b R_b^2 \left( \dot{\varphi} - \frac{R\dot{\theta}}{R_b} \right) \end{matrix} \right\}_{b_b}$$

## Q30)

$$\overrightarrow{\delta_{G,2/0}} = \left( \frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}}}{dt} \right)_0 + \vec{0} \text{ car } G \text{ est le Centre d'inertie de } 2.$$

$$\overrightarrow{\delta_{G,2/0}} = \left( \frac{d \left( \frac{2}{5} m_b R_b^2 \left( \dot{\varphi} - \frac{R\dot{\theta}}{R_b} \right) \overrightarrow{z_b} \right)}{dt} \right)_0 = \frac{2}{5} m_b R_b^2 \left( \ddot{\varphi} - \frac{R\ddot{\theta}}{R_b} \right) \overrightarrow{z_b}$$

## III.5 : Etude des conditions de roulement de la bille.

## III.5.1 : Estimation du coefficient de frottement.

## Q31)

$$(\hat{a}, \hat{b}) \text{ point critique de } D \Leftrightarrow \frac{\partial D}{\partial a}(\hat{a}, \hat{b}) = 0 \text{ et } \frac{\partial D}{\partial b}(\hat{a}, \hat{b}) = 0$$

$$\text{Or : } \frac{\partial D}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - ax_i - b) = -2\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i\right) = -2ne + 2nam_x + 2nb\bar{x}$$

$$\frac{\partial D}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^n -2(y_i - ax_i - b) = -2\left(\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n ax_i - \sum_{i=1}^n b\right) = -2n\bar{y} + 2na\bar{x} + 2nb$$

$$\text{Donc } (\hat{a}, \hat{b}) \text{ critique} \Leftrightarrow \begin{cases} -e + \hat{a}m_x + \hat{b}\bar{x} = 0 \\ -\bar{y} + \hat{a}\bar{x} + \hat{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e + \hat{a}m_x + (\bar{y} - \hat{a}\bar{x})\bar{x} = 0 \\ \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e - \bar{y}\bar{x} = \hat{a}m_x - \hat{a}\bar{x}^2 \\ \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \end{cases}$$

Donc  $D$  possède un unique point critique  $(\hat{a}, \hat{b})$  avec  $\hat{a} = \frac{e - \bar{y}\bar{x}}{m_x - \bar{x}^2}$  et  $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$ .

## Q32)

$$D(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \text{ donc } D \text{ est } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ donc } \frac{\partial^2 D}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 D}{\partial b \partial a}, \text{ cf Théorème de Schwarz.}$$

Donc  $H(a, b)$  est une matrice symétrique et réelle. Donc  $H(a, b)$  est diagonalisable.

## Q33)

$\lambda$  et  $\mu$  sont les valeurs propres de  $\hat{H} = H(\hat{a}, \hat{b})$ , donc  $\hat{H}$  est semblable à  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Donc  $\text{Det}(\hat{H}) = \lambda\mu$  et  $\text{tr}(\hat{H}) = \lambda + \mu$ , car 2 matrices semblables ont même déterminant et même trace.

## Q34)

$$\text{On a établi (Q31) : } \frac{\partial D}{\partial a}(a, b) = -2ne + 2nam_x + 2nb\bar{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial b}(a, b) = -2n\bar{y} + 2na\bar{x} + 2nb$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a^2}(a, b) = \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial D}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial(-2ne + 2nam_x + 2nb\bar{x})}{\partial a} = 2nm_x$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial b^2}(a, b) = \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial D}{\partial b}(a, b) = \frac{\partial(-2n\bar{y} + 2na\bar{x} + 2nb)}{\partial b} = 2n$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a \partial b}(a, b) = \frac{\partial^2 D}{\partial b \partial a}(a, b) = \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial D}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial(-2ne + 2nam_x + 2nb\bar{x})}{\partial b} = 2n\bar{x}$$

$$\text{Et : } \hat{H} = H(\hat{a}, \hat{b}) = \begin{pmatrix} 2nm_x & 2n\bar{x} \\ 2n\bar{x} & 2n \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} m_x & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}$$

**Q35)**

$$\bar{x}^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i \right)^2 = \left\langle \left( \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right), (x_1, \dots, x_n) \right\rangle^2$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz donne :  $\langle a, b \rangle^2 \leq \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$ , d'où :

$$\bar{x}^2 = \left\langle \left( \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right), (x_1, \dots, x_n) \right\rangle^2 \leq \left\| \left( \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \right\|^2 \times \left\| (x_1, \dots, x_n) \right\|^2$$

$$\bar{x}^2 \leq n \left( \frac{1}{n} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{Donc : } \boxed{\bar{x}^2 \leq m_x}$$

L'égalité  $\langle a, b \rangle^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$  intervient si et seulement si les 2 vecteurs  $a$  et  $b$  sont colinéaires, c'est-à-dire, dans notre cas :  $\exists k, \forall i, x_i = k \frac{1}{n}$

Or l'énoncé le dit explicitement, toutes les valeurs d'effort normal  $x_i$  ne sont pas égales, donc l'égalité est impossible.

Finalement :  $\boxed{\bar{x}^2 < m_x}$

$$\text{Det}(\hat{H}) = (2n)^2 (m_x - \bar{x}^2) > 0$$

**Q36)**

$$\text{Det}(H(\hat{a}, \hat{b})) = (2n)^2 (m_x - \bar{x}^2) > 0.$$

$$\text{tr}(H(\hat{a}, \hat{b})) = 2n(m_x + 1) > 0 \text{ car } m_x > 0 \text{ (somme de nombres positifs).}$$

La somme  $\lambda + \mu$  et le produit  $\lambda\mu$  sont strictement positifs, donc  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ .

Donc le point  $(\hat{a}, \hat{b})$  correspond à un minimum de  $D$ . Le point  $(\hat{a}, \hat{b})$  étant le seul point critique,  $D$  atteint son minimum en  $(\hat{a}, \hat{b})$ .

**Q37)**

$$\hat{a} = \frac{e - \bar{y} \bar{x}}{m_x - \bar{x}^2} \text{ et } \hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \bar{x}$$

$$\text{Donc : } \hat{a} = \frac{0,0741 - 0,12 \times 0,6}{0,37 - 0,6^2} = \frac{0,0741 - 0,072}{0,37 - 0,36} = \frac{0,0021}{0,01} \quad \text{Donc : } \underline{\hat{a} = 0,21}.$$

$$\underline{\hat{b} = 0,12 - 0,21 \times 0,6 = 0,12 - 0,126} \quad \underline{\hat{b} = -0,006}.$$

La valeur de  $\hat{b}$  est de l'ordre de -0,006 N pour des valeurs d'efforts tangentiels de l'ordre de 0,2 N.

On peut donc raisonnablement affirmer que  $\hat{a}X + \hat{b} \approx \hat{a}X$

L'effort tangential peut être raisonnablement considéré proportionnel à l'effort normal (sous réserve de la validation par le coefficient de corrélation linéaire (Q39)).

**Q38)**

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x} \bar{y}) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} y_i - \sum_{i=1}^n \bar{y} x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x} \bar{y} \right)$$

$$c = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x} \bar{y} \sum_{i=1}^n 1 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{\bar{y}}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x} \bar{y} = e - \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{y}$$

$$\boxed{c = e - \bar{x} \bar{y}}$$

**Q39)**

Le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X, Y)$  permet de valider (ou d'infirmer) l'hypothèse selon laquelle il existe bien une relation de dépendance affine entre  $X$  et  $Y$ .

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)} \cdot \sqrt{\mathbb{V}(Y)}} \approx \frac{c}{\sqrt{v_x \cdot v_y}}$$

$$\frac{c}{\sqrt{v_x \cdot v_y}} = \frac{e - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(m_x - \bar{x}^2) \cdot v_y}} = \frac{0.0021}{\sqrt{0.01 \cdot 4.9 \cdot 10^{-4}}} = \frac{2,1}{\sqrt{4.9}} = \frac{7 \cdot 0,3}{\sqrt{49}} = \frac{7 \cdot 0,3}{7 \sqrt{1}} = \frac{0,3 \cdot 10}{\sqrt{1} \cdot 10} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0.95$$

Le coefficient de corrélation étant proche de 1 ( $\rho(X, Y) \approx 0.95$ ), on peut affirmer qu'il existe bien une relation de dépendance affine entre  $X$  et  $Y$  (et même linéaire d'après Q37).

**III.5.2 : Conditions de roulement sans glissement****Q40)**

$\omega_{2/1} < 0$  donc  $\overrightarrow{V}_{I,2/1}$  est porté par  $-\vec{y}_b$ . On en déduit que l'action tangentielle de frottement  $T$  de 1 sur 2 est portée par  $+\vec{y}_b$ .

On a donc pour un contact en  $I$  tel que  $\overrightarrow{GI} = R_b \vec{x}_b$  : l'action normale au contact en  $I$  de 1 sur 2 est donc portée par  $-\vec{x}_b$ .

La loi de Coulomb donne :  $f = \tan \varphi = \left| \frac{N}{T} \right|$ .  $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} -N & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I, b_b} = \begin{Bmatrix} -N & 0 \\ fN & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I, b_b}$  (avec  $T$  et  $N$  positifs)

Or :  $\overrightarrow{M}_{G,1 \rightarrow 2} = \overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2} + \overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{b_b} + \begin{Bmatrix} R_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{b_b} \wedge \begin{Bmatrix} -N \\ fN \\ 0 \end{Bmatrix}_{b_b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_b fN \end{Bmatrix}_{b_b}$  Donc :  $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} -N & 0 \\ fN & 0 \\ 0 & R_b fN \end{Bmatrix}_{G, b_b}$

**Q41)**

Si le contact est sans glissement, il faut que l'effort tangential engendre un couple suffisamment important pour compenser le couple d'induction, soit  $R_b fN - C_{ind} = 0$  à la limite du glissement.

Il faut donc imposer :  $N > \frac{C_{ind}}{R_b f}$

**Q42)**

L'effort d'attraction exercé par le rail ferromagnétique sur la bille (ou inversement) dépend de l'orientation du champ magnétique  $\vec{m}$  de la bille magnétique par rapport à la normale à la surface du rail  $\vec{n}$ . Cette force est maximale lorsque les lignes de champ magnétiques sont perpendiculaires à la surface du rail ( $\vec{m}$  et  $\vec{n}$  colinéaires ( $\beta = +\frac{\pi}{2}$  ou  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ )) et minimale lorsque les lignes de champ magnétiques sont parallèles à la surface du rail ( $\vec{m}$  et  $\vec{n}$  orthogonaux  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ ). La force d'attraction magnétique peut être modélisée par la relation  $k \vec{m} \cdot \vec{n}$ . La fonction  $g$  décrivant la force  $F_{fer}$  est donc paire.

Le rail ferromagnétique n'est pas polarisé, la force d'attraction ne dépend pas de l'orientation de l'aimant. Elle sera identique si le pôle nord ou le pôle sud de l'aimant se présente en face du rail ferromagnétique. La fonction  $g$  décrivant la force  $F_{fer}$  est donc  $\pi$  périodique.

**Q43)**

$$g'(\beta) = -cb \sin(c\beta) \text{ donc } g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -cb \sin\left(c\frac{\pi}{2}\right). \text{ Or d'après le graphe, } g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ donc } c = 2(2).$$

$$\text{Or la dérivée ne s'annule pas sur } \left]0; \frac{\pi}{2}\right[ \text{ donc } c = 2 \text{ ou } c = -2.$$

$$g(\beta) = a + b \cos(c\beta) \text{ Donc : } g(0) = a + b \cos(0) = a + b \quad \text{Donc, d'après la courbe : } a + b \approx 0.17$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b \cos\left(c\frac{\pi}{2}\right) = a - b \quad \text{Donc, d'après la courbe : } a - b \approx 0.37$$

Il vient :  $a \approx 0,27$  et  $b \approx -0,10$ .

La courbe est croissante sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ , et  $b < 0$ , donc  $c > 0$ , donc  $c = 2$

### III.6 : Puissance mécanique extraite

**Q44)**

$$Ec_{2/0} = \{\mathcal{E}_{2/0}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/0}\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} m_b l \dot{\phi} \cos \theta & 0 \\ m_b (-l \dot{\phi} \sin \theta + R \dot{\phi} + R \dot{\theta}) & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m_b R_b^2 \left( \dot{\phi} - \frac{R \dot{\theta}}{R_b} \right) \end{matrix} \right\}_G \otimes \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 0 & l \dot{\phi} \cos \theta \\ 0 & -l \dot{\phi} \sin \theta + R \dot{\phi} + R \dot{\theta} \\ \dot{\phi} - \frac{R \dot{\theta}}{R_b} & 0 \end{matrix} \right\}_{b_b} \end{matrix}$$

$$Ec_{2/0} = \{\mathcal{E}_{2/0}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/0}\} = m_b \left( (l \dot{\phi} \cos \theta)^2 + (-l \dot{\phi} \sin \theta + R \dot{\phi} + R \dot{\theta})^2 + \frac{2}{5} R_b^2 \left( \dot{\phi} - \frac{R \dot{\theta}}{R_b} \right)^2 \right)$$

$$Ec_{2/0} = m_b \left( l^2 \dot{\phi}^2 + (-2l \dot{\phi} \sin \theta R (\dot{\phi} + \dot{\theta})) + R^2 (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{2}{5} R_b^2 \dot{\phi}^2 - \frac{4}{5} R_b \dot{\phi} R \dot{\theta} + \frac{2}{5} R^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

$$Ec_{2/0} = m_b \left( l^2 \dot{\phi}^2 - 2l \dot{\phi}^2 \sin \theta R - 2l \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta R + R^2 \dot{\phi}^2 + 2R^2 \dot{\phi} \dot{\theta} + R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2}{5} R_b^2 \dot{\phi}^2 - \frac{4}{5} R_b \dot{\phi} R \dot{\theta} + \frac{2}{5} R^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

$$Ec_{2/0} = m_b \left( \dot{\phi}^2 \left( l^2 - 2l \sin \theta R + R^2 + \frac{2}{5} R_b^2 \right) + 2R \dot{\phi} \dot{\theta} \left( -l \sin \theta + R - \frac{2}{5} R_b \right) + \frac{7}{5} R^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

Remarque : Je n'ai pas de  $\varphi$  dans mon expression.

**Q45)**

$$Ep = m_b g y(G) + cte \text{ avec } y(G) \text{ l'altitude de la bille par rapport au point B } (y(B) = 0 \Rightarrow Ep = 0)$$

$$y(G) = (R+l) - \overline{GO_0} \cdot \overline{y_0} \text{ or}$$

$$\overline{GO_0} = \overline{GO} + \overline{OO_0} = -R \overline{x_b} + l \overline{y_1} = -R (\cos(\theta + \varphi) \overline{x_0} + \sin(\theta + \varphi) \overline{y_0}) + l (\cos \varphi \overline{y_0} - \sin \varphi \overline{x_0})$$

$$y(G) = (R+l) - (-R \sin(\theta + \varphi) + l \cos \varphi) = R(1 + \sin(\theta + \varphi)) + l(1 - \cos \varphi)$$

$$Ep = m_b g (R(1 + \sin(\theta + \varphi)) + l(1 - \cos \varphi))$$

**Q46)**

Si la bille 2 roule sans glisser sur le tore 1 en  $I$ , alors la puissance dissipée au niveau du contact ponctuel est nulle.

**Q47)**

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, puisque la puissance dissipée au niveau du contact est nulle et

celle convertie vaut  $\mathcal{P}_e = -c_e \|\overline{V}_{G,2/1}\|^2$ , il vient :  $dEc + dEp = \mathcal{P}_e \cdot dt$  ou  $\frac{d(Ec + Ep)}{dt} = -c_e \|\overline{V}_{G,2/1}\|^2$

Les dérivées  $\frac{dEc}{dt}$  et  $\frac{dEp}{dt}$  comme le terme  $\|\overline{V}_{G,2/1}\|^2$  font intervenir des fonctions non linéaires (cos, sinus, puissances, ...). L'équation différentielle obtenue n'est donc pas linéaire.

On peut proposer une résolution numérique par la méthode d'Euler pour trouver une solution approchée.