

# Modélisation mathématique et informatique du découpage d'une région en unités cellulaires pour la téléphonie mobile

Titre initial : Les antennes pour la téléphonie mobile

Auteur : J.-S. Partre (trinômé avec S. Bavoit et B. Orisvian)

Remarque : Nous avons vu la dualité avec la triangulation de Delaunay, mais choisi de ne pas approfondir cette notion car trop divergente par rapport au sujet.

## Positionnement thématique

*Modélisation mathématique, Programmation, Géométrie.*

## Mots-clés

Mots-clés (en français)	Mots-clés (en anglais)
<i>Téléphonie cellulaire</i>	<i>Cellular phones</i>
<i>Géométrie algorithmique</i>	<i>Computational geometry</i>
<i>Tessellation de Voronoi</i>	<i>Voronoi tessellation</i>
<i>Diagrammes de Laguerre</i>	<i>Laguerre diagrams</i>
<i>Homologie</i>	<i>Homology</i>

## Bibliographie commentée

Préambule expliquant notre changement de titre : Lorsque nous avons déposé notre titre en Janvier, nous avons pensé à un sujet orienté sur les télécommunications. Au cours de notre recherche bibliographique, nous nous sommes aperçus qu'il était plus intéressant, notamment pour être dans le thème "optimalité, choix, contraintes, hasard" de nous recentrer sur la manière d'obtenir les zones "couvertes" par les différentes antennes.

La téléphonie mobile utilise des réseaux d'antennes couvrant une certaine zone, induisant un *maillage* de cette zone, ces mailles étant de taille allant de 1 à 10 par exemple selon qu'il s'agit d'une zone citadine ou rurale. Dans l'idéal, il pourrait s'agir de zones formant un recouvrement disjoint. Dans ce cas, une fois décidés les emplacements des antennes, "la mise en cellules" (disjointes) relève de ce que l'on appelle en mathématiques la "tessellation de Voronoi" ; cette modélisation mathématique relativement simple, qui ne convient que pour des antennes ayant toutes même puissance, possède son pendant en modélisation informatique ; il s'agit de l'algorithme de Voronoï tellement important que c'est une des "briques de base" du domaine récent appelé "géométrie algorithmique". Cet algorithme génère les cellules associées à un ensemble fini de points, appelés "germes" (les localisations d'antennes), la cellule  $C_k$  associée au  $k$ ième point  $P_k$  étant définie comme étant l'ensemble des points du plan plus proche de  $P_k$  que de tout autre  $P_i$ . Cet algorithme est implémenté dans de nombreux logiciels y compris des logiciels libres par exemple Voroglidge [1] ; actuellement, nous nous orientons vers une programmation avec Matlab (environnement logiciel conseillé par notre professeur référent)

où l'algorithme peut être implémenté de façon très efficace.

Dans le cas où les puissances ne sont pas toutes identiques, la modélisation mathématique, cousine de la précédente, est celle des diagrammes de puissance [2, 1] ([1] étant le document qui nous a été le plus utile). Des cas très spéciaux peuvent alors apparaître, attirant l'attention sur des cas où des antennes s'avèrent complètement sous-dimensionnées. Là aussi, il y a une modélisation informatique.

En fait, travailler dans l'hypothèse où les zones sont disjointes peut être une bonne première approximation, mais la réalité est que les zones ont un certain recouvrement, mais ce recouvrement ne doit pas être excessif. On change alors de point de vue, en posant le problème mathématique de la minimisation du nombre de disques recouvrant une zone donnée. De manière inattendue, une théorie mathématique, l'homologie, permet de rendre compte de ce type de situations. Cette théorie est notamment traitée dans un article de recherche [3] utilisant les probabilités.

## Problématique retenue

Pour un utilisateur de téléphonie mobile, c'est en principe l'antenne la plus proche avec laquelle il communique. Comment fait-on alors pour dessiner la région (la cellule) affectée à telle ou telle antenne ? Il s'agit de régions dites de Voronoï ; si l'on a beaucoup d'antennes, l'obtention de l'ensemble de ces cellules, qui se fait par un programme d'ordinateur, s'appelle une tessellation. Cela fait partie d'un domaine très vaste qui s'appelle la géométrie algorithmique (que notre camarade B. Orisvian a particulièrement travaillé). Si les antennes ont des puissances différentes, la méthode précédente est à adapter. C'est ce sur quoi j'ai travaillé ; on débouche sur le modèle de tessellation de Laguerre, qui, lui aussi se programme, comme je le montrerai. Enfin, notre camarade (S. Bavoire) projette d'aller plus loin en considérant des zones de recouvrement, avec la théorie de l'homologie.

## Objectifs du TIPE

Les diagrammes de Voronoï classiques constituent l'outil mathématique de premier niveau permettant de régionaliser le plan en polygones convexes, par exemple pour définir des cellules (des régions) pour la téléphonie mobile. Cependant, pour aller plus loin, notamment pour tenir compte de puissances d'émission variables (ce qui a été l'objet de mon travail propre) et/ou de problématiques de recouvrement minimal par des disques, il faut faire appel à des théories plus avancées. C'est l'objectif que je me suis fixé de montrer. Pour cela je mêlerai modélisation mathématique et modélisation informatique, avec exemples et contre-exemples. Certains aspects sociétaux seront mentionnés en plus [4].

Nous n'avons pas recherché de contacts, les échanges avec notre professeur-encadrant ayant suffi. (tous les sites ci-dessous étaient actifs début 2017)

## Références bibliographiques

- [1] Houman BOROUCHE, Nicolas FLANDRIN et Chakib BENNIS : Diagramme de Laguerre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Mécanique*, 333(10):762–767, 2005.
- [2] Franck HETROY : Un petit peu de géométrie algorithmique. [http://evasion.imag.fr/Membres/Franck.Hetroy/Teaching/GeoAlgo/poly\\_geoalgo.pdf](http://evasion.imag.fr/Membres/Franck.Hetroy/Teaching/GeoAlgo/poly_geoalgo.pdf).
- [3] Laurent DECREUSEFOND, Eduardo FERRAZ, H RANDRIAMBOLOLONA, Anaïs VERGNE *et al.* : Simplicial homology of random configurations. *Advances in Applied Probability*, 46(2):325–347, 2014. <http://arxiv.org/pdf/1103.4457.pdf>.

- [4] Danger téléphone portable. [www.robindestoits.org](http://www.robindestoits.org). blog basé sur des opinions / défense d'intérêts.
- [5] TL SINGAL : *Wireless communications*. Tata McGraw Hill Education Private Limited, 2010.
- [6] Mark DE BERG, Cheong OTFRIED, Marc VAN KREVELD et Mark OVERMARS : *Computational geometry*. Springer, 2008. 3ième édition.
- [7] Jean-Daniel BOISSONNAT et Mariette YVINEC : *Géométrie algorithmique*. 1995.
- [8] Oswin AICHHOLZER, Danny Z CHEN, DT LEE, Asish MUKHOPADHYAY, Evanthia PAPADOPOULOU et Franz AURENHAMMER : Voronoi diagrams for direction-sensitive distances. *In Proceedings of the thirteenth annual symposium on Computational geometry*, pages 418–420. ACM, 1997. [www.igi.tugraz.at/telematik/tele1-02\\_aich-favor.pdf](http://www.igi.tugraz.at/telematik/tele1-02_aich-favor.pdf).
- [9] Christian ICKING, Rolf KLEIN, Peter KÖLLNER et Lihong MA : Java applets for the dynamic visualization of voronoi diagrams. *In Computer Science in Perspective*, pages 191–205. Springer, 2003. [www.pi6.fernuni-hagen.de/GeomLab/VoroGlide/index.html](http://www.pi6.fernuni-hagen.de/GeomLab/VoroGlide/index.html).en.
- [10] Groupe de recherches geometrica. <https://team.inria.fr/geometrica/>. Data Shape : INRIA.