$\boxed{\text{2TSI. Devoir surveillé 05}}$
$\boxed{\text{KORREKTUR}}$

Exercice

Dans l'espace euclidien rapporté à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, soit l'endomorphisme ϕ canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- $A \in O_3(\mathbb{R})$, en effet si C_1, C_2 et C_3 sont les colonnes, on a clairement :

$$\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0 \text{ et } \langle C_1, C_1\rangle = \langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1.$$

- Puis comme $C_1 \wedge C_2 = C_3$, la matrice $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et est donc une **rotation vectorielle**.
- On détermine l'axe de ϕ par :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + 2z &=& 3x \\ 2x + 2y - z &=& 3y \\ -x + 2y + 2z &=& 3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x - y + 2z &=& 0 \\ 2x - y - z &=& 0 \\ -x + 2y - z &=& 0 \end{array}\right. .$$

On trouve $x = y = z$ et le vecteur $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ porte et oriente l'axe.

- Puis si θ est l'angle de ϕ, on a :

$$\operatorname{tr} A = 2 = 2\cos\theta + 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Puis on prend par exemple $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $\vec{v}.\vec{n} = 0$.

On a rapidement : $\phi(\vec{v}) = \frac{1}{3.\sqrt{2}}(3, 0, -3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$. On fait :

$$\mathsf{Det}\,(\vec{n}, \vec{v}, \phi(\vec{v})) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta.$$

On en déduit que si l'on oriente l'axe de la rotation par $\vec{n}$, l'angle est $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Problème 01

On identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $x + iy \in \mathbb{C}$. On pose pour tout réel θ l'application $r_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{i\theta}z$.

Partie I- Rotations du plan

Ici n désigne un entier naturel non nul et on note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$.

1. D'après le cours, cette matrice est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2. f_θ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice de rotation que l'on a écrit à **1.**
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$.

3. Première méthode.
Posons $M(z)$ et $M'(z')$. Alors $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe $z' = e^{i\theta}z$ et on a : $\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$.
De plus $\mathsf{arg}\,(z') = \theta + \mathsf{arg}\,(z)$ et donc $\mathsf{arg}\,(z') - \mathsf{arg}\,(z) = \theta$, l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ vaut θ.
Et on peut conclure : r_θ est la rotation plane d'angle θ.

Autre méthode : L'affixe de $f_\theta(x,y)$ est $x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$. Par ailleurs :

$$e^{i\theta}(x+iy) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) = x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta).$$

C'est la même chose !

4. On sait d'après d'Alembert-Gauss que $z^n - 1 = 0$ a exactement n solutions (distinctes ou non). Par ailleurs, pour tout $k \in [\![0,\, n-1]\!]$,

$$\omega_k^n = \left(e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)^n = e^{\frac{2kn\pi}{n}i} = 1.$$

Ainsi ω_0, ω_1, ..., ω_{n-1} sont n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et il n'y a que ces racines.

5. Pour tout $k \in [\![0,\, n-1]\!]$, on a :

$$r_{2\pi/n}(\omega_k) = e^{\frac{2\pi}{n}i}\omega_k = e^{\frac{2\pi}{n}i}.e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \omega_{k+1}.$$

6. On a immédiatement : $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = i$, $\omega_2 = -1$ et $\omega_3 = -i$.

Partie II- Marche aléatoire sur un carré

Ici $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à une boussole centrée en O dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-i$)

On suppose que lorsque le bout de l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $1/2$ dans le sens trigonométrique et avec la probabilité $1/2$ dans le sens inverse. D'une étape à l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place. Et par exemple, si le bout de l'aiguille est à l'Ouest, à l'étape suivante, elle sera au Nord ou au Sud. Enfin, l'étape 0 symbolise la position initiale de l'aiguille.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de la pointe de l'aiguille de la boussole à l'étape n. Ainsi, A_n prend ses valeurs dans $\{1,\, i,\, -1,\, -i\}$.

On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables aléatoires A_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire réelle qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse.

Ainsi $D_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(D_n = -1) = P(D_n = 1) = \dfrac{1}{2}$.

1. L'affixe A_{n+1} est obtenue à partir de A_n soit par une rotation dans le sens trigonométrique d'angle $\pi/2$ et dans ce cas $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}}A_n$; soit par une rotation d'angle $-\pi/2$ et dans ce cas $A_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}}A_n$. Or D_n vaut 1 si la rotation s'effectue dans le sens trigo et -1 sinon.

Donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n}A_n.$$

2. $\{(A_n = 1), (A_n = i), (A_n = -1), (A_n = -i)\}$ est un système complet d'événements de Ω. Et :

$$P(A_{n+1} = 1) = P_{(A_n=1)}(A_{n+1} = 1)P(A_n = 1) + P_{(A_n=i)}(A_{n+1} = 1)P(A_n = i)$$

$$+P_{(A_n=-1)}(A_{n+1} = 1)P(A_n = -1) + P_{(A_n=-i)}(A_{n+1} = 1)P(A_n = -i).$$

Comme $P_{(A_n=1)}(A_{n+1} = 1) = 0$ car l'aiguille bouge toujours, comme $P_{(A_n=i)}(A_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}$ (déplacement Est-Nord), comme $P_{(A_n=-1)}(A_{n+1} = 1) = 0$, pas de déplacement direct Ouest-Est possible et comme $P_{(A_n=-i)}(A_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}$ (déplacement Sud-Est), on a bien :

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i).$$

3. On a aussi :

$$P(A_{n+1}=i)=\frac{1}{2}P(A_n=1)+\frac{1}{2}P(A_n=-1).$$

$$P(A_{n+1}=-1)=\frac{1}{2}P(A_n=i)+\frac{1}{2}P(A_n=-i).$$

$$P(A_{n+1}=-i)=\frac{1}{2}P(A_n=1)+\frac{1}{2}P(A_n=-1).$$

4-a On pose dans la suite les matrices

$$M=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},\ \Delta=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a immédiatement pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Delta^n=\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4-b Calculons l'inverse B^{-1} de B. Par exemple avec la méthode dite de Gauss-Jordan. On concatène B et I_4. Puis on fait des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice 4×8 formée.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec les opérations élémentaires $L_2\leftarrow L_2+L_1$, $L_3\leftarrow L_3-L_1$, $L_4\leftarrow L_4+L_1$. Puis :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec les opérations élémentaires $L_3\leftarrow \dfrac{L_3}{2}$ et $L_4\leftarrow L_4-L_2$. Puis :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

avec les opérations élémentaires $L_4\leftarrow \dfrac{L_4}{2}$. Puis :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

avec l'opération élémentaire $L_2\leftarrow \dfrac{1}{2}(L_2+L_3+L_4)$. Puis :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

avec l'opération élémentaire $L_1\leftarrow L_1+L_3$.

Puis :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

avec l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. Puis, on déconcatène :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4-c Première méthode : La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable, par ailleurs son polynôme caractéristique est :

$$\chi_M(t) = \begin{vmatrix} t & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & t & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & t & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & t \end{vmatrix} = t^2(t-1)(t+1).$$

Par exemple, j'ai fait $C_2 \leftrightarrow C_2 - C_4$ puis on met t en facteur dans C_2 puis on développe selon la première ligne (on a alors deux déterminants d'ordre 3) puis on termine le calcul.
On peut donc conclure que M et Δ sont bien semblables.

Puis on a : $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi B est bien une matrice de passage qui permet d'écrire : $B\Delta B^{-1} = M$ (sans faire le produit des 3 matrices).

Autre méthode : la vaillante. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même :

$$B\Delta B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = M.$$

4-d , Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = B\Delta^n B^{-1}$.
Initialisation. La formule est vraie pour $n = 0$ car alors $M^0 = B\Delta^0 B^{-1} = BI_4B^{-1} = I_4$.
De même, pour $n = 1$, $M^1 = B\Delta B^{-1} = M$ (question précédente).
Transmission. Supposons la formule vraie pour n donné. Alors :

$$M^{n+1} = M^n M = \left(B\Delta^n B^{-1}\right)\left(B\Delta B^{-1}\right) = B\Delta^n \Delta B^{-1} = B\Delta^{n+1}B^{-1}.$$

Explicitons M^n sous la forme d'une seule matrice :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Après un calcul destiné à départager les *ex-aequo*, on a :

$$M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 \\ (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 \end{pmatrix}.$$

5-a On considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n=1) \\ P(A_n=i) \\ P(A_n=-1) \\ P(A_n=-i) \end{pmatrix}$ et on suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est, c'est-à-dire que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il est clair qu'en posant $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, et en utilisant **II-3**, on a :

$$U_{n+1} = MU_n.$$

5-b On montre alors par récurrence que $U_n = M^n U_0$. Il reste à écrire :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(A_n=1) \\ P(A_n=i) \\ P(A_n=-1) \\ P(A_n=-i) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 \\ (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et donc :

$$U_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n+1 \\ (-1)^{n+1}+1 \\ (-1)^n+1 \\ (-1)^{n+1}+1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(A_n=1) = \frac{(-1)^n+1}{4},\ P(A_n=i) = \frac{(-1)^{n+1}+1}{4},$$

$$P(A_n=-1) = \frac{(-1)^n+1}{4}\ P(A_n=-i) = \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}.$$

Problème 02

Orthonormalité des lois de Rademacher

Dans tout le problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, P) et pour X une variable aléatoire sur Ω, on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.
On dit que X suit une **loi de Rademacher** lorsque : $X(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X=-1) = P(X=1) = \dfrac{1}{2}$.
On fixe dans tout l'exercice $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie I- Un produit scalaire

On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs : $V_f(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X(\Omega) \text{ est fini }\}$.

1-a • Si X suit une loi de Rademacher, alors $X(\Omega) = \big\{-1, 1\big\}$; en particulier X admet un nombre fini de valeurs (2 valeurs exactement) donc $\boxed{X \in V_f(\Omega)}$.

- Par définition,

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) = (-1)\,P(X=-1) + 1\,P(X=1) = (-1)\,\frac{1}{2} + 1\,\frac{1}{2}\,;$$

soit $\boxed{E(X)=0}$

1-b

- La variable nulle suit une loi certaine et admet une seule valeur, 0, donc la variable nulle appartient à $V_f(\Omega)$.
- Soient X_1 et X_2 deux variables finies et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors la variable $\lambda X_1 + X_2$ prend un nombre fini de valeurs et ainsi $\lambda X_1 + X_2 \in V_f(\Omega)$

On a montré que $\boxed{V_f(\Omega) \text{ est un } \mathbb{R}\text{−espace vectoriel}}$

1-c

- *Symétrie :* $\Phi(Y,X) = E(YX) = E(XY) = \Phi(X,Y)$; donc Φ est symétrique.
- *Bilinéarité :* Soient X_1 et X_2 deux variables finies et $\lambda \in \mathbb{R}$;
$\Phi(\lambda X_1 + X_2, Y) = E\big((\lambda X_1 + X_2)Y\big) = E\big(\lambda X_1 Y + X_2 Y\big) = \lambda E(X_1 Y) + E(X_2 Y)$ par linéarité de l'espérance ; donc $\Phi(\lambda X_1 + X_2, Y) = \lambda\Phi(X_1,Y) + \Phi(X_2,Y)$; ainsi Φ est linéaire à gauche, et par symétrie, on en déduit que Φ est bilinéaire.
- *Positivité :* $\Phi(X,X) = E(X^2) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^2 P(X=x)$; avec $P(X=x) \in [0,1]$ et $x^2 \geqslant 0$;
on en déduit $\Phi(X,X) \geqslant 0$ et Φ est positive.
- *Définie-Positivité :* $\Phi(X,X) = 0$ si, et seulement si, $\sum_{x\in X(\Omega)} x^2 P(X=x) = 0$; or une somme de termes positifs ou nuls est nulle si et seulement chaque terme est nul ; donc $\forall x \in X(\Omega)$, $x^2P(X=x) = 0$; alors, soit $P(X=x) = 0$ et alors l'événement $(X=x)$ est impossible ; soit $x = 0$. Finalement la seule valeur possible pour X est 0 et ainsi X est la variable nulle.

Φ est symétrique, bilinéaire, positive et définie-positive ; donc $\boxed{\Phi \text{ est un produit scalaire sur } V_f(\Omega)}$

Partie II-Orthonormalité et projection

On considère $X_1, ..., X_n$ une suite de n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** et suivant toutes la même loi de Rademacher.
Donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) = \{-1,1\}$, $P(X_i=-1) = P(X_i=1) = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i^2)$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$; $\|X_i\|^2 = \Phi(X_i,X_i) = E(X_i^2) = \sum_{x\in X_i(\Omega)} x^2 P(X_i = x)$; or X_i suit une loi de Rademacher, donc $\|X_i\|^2 = (-1)^2\dfrac{1}{2} + (1)^2\dfrac{1}{2}$; on a bien $\|X_i\| = 1$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, calculons :

$$E(X_iX_j) = \sum_{x_i\in X_i(\Omega)} \sum_{x_j \in X_j(\Omega)} x_ix_jP\big((X_i = x_i)\cap(X_j=x_j)\big).$$

(La somme n'a que quatre termes et on remarquera que l'on a l'égalité
$P\big((X_i = x_i)\cap(X_j=x_j)\big) = P(X_i=x_i)P(X_j=x_j)$ pour tous les x_i et x_j possibles.)
Soit $i \neq j$, $\Phi(X_i,X_j) = E(X_iX_j) = \sum_{x_i\in X_i(\Omega)} \sum_{x_j \in X_j(\Omega)} x_ix_jP\big((X_i = x_i)\cap(X_j=x_j)\big)$; X_i et X_j suivent des lois de Rademacher, donc :

$$\begin{aligned}\Phi(X_i,X_j) = {} & (-1)(-1)P\big((X_i=-1)\cap(X_j=-1)\big) + (-1)(1)P\big((X_i=-1)\cap(X_j=1)\big) \\ & + (1)(-1)P\big((X_i=1)\cap(X_j=-1)\big) + (1)(1)P\big((X_i=1)\cap(X_j=1)\big)\,;\end{aligned}$$

de plus X_i et X_j sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned}\Phi(X_i,X_j) = {} & (-1)(-1)P(X_i=-1)P(X_j=-1) + (-1)(1)P(X_i=-1)P(X_j=1) \\ & + (1)(-1)P(X_i=1)P(X_j=-1) + (1)(1)P(X_i=1)P(X_j=1)\,;\end{aligned}$$

$$\Phi(X_i,X_j) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

Autre méthode : Comme X_i et X_j pour $i \neq j$ sont indépendantes,

$$E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j) = 0 \times 0 = 0$$

et on retrouve $\Psi(X_i, X_j) = 0$.
Les $\big(X_i\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, donc :

$$\boxed{\big(X_1, ..., X_n\big) \text{ est une famille orthogonale de } V_f(\Omega) \text{ pour le produit scalaire } \Phi}$$

2. Soit $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ une famille orthonormée de n vecteurs, on notera . le produit scalaire dans cette question et prenons $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$a_1\vec{u}_1 + ... + a_i\vec{u}_i + ... + a_n\vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow (a_1\vec{u}_1 + ... + a_i\vec{u}_i + ... + a_n\vec{u}_n) .\vec{u}_i = a_i = 0.$$

Et cela est valable pour tout entier i. Donc la famille $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ est libre.
3. On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, ..., X_n$.
$F = \mathsf{Vect}\big(X_1, ..., X_n\big)$; la famille génératrice de F est une famille orthonormale, donc est également une famille libre ; ainsi cette famille est une base de F et donc $\boxed{\mathsf{dim}\,(F) = n}$.
4. Soit $X \in V_f(\Omega)$, indépendante des $\big(X_i\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$; $\Phi(X, X_i) = E(XX_i) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{x_i\in\{-1,1\}} xx_iP\big((X = x) \cap (X_i = x_i)\big)$; soit

$\Phi(X, X_i) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x(-1)P\big((X = x) \cap (X_i = -1)\big) + \sum_{x\in X(\Omega)} x(1)P\big((X = x) \cap (X_i = 1)\big)$; et par indépendance :

$$= -\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)P(X_i = -1) + \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)P(X_i = 1)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) + \frac{1}{2}\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) = -\frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X)$$

ce qui donne : $\Phi(X, X_i) = 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$; ce qui signifie que $\boxed{X \in F^\perp}$.
Autre méthode : encore une fois comme X et X_i sont indépendants pour tout i entier,

$$\Psi(X, X_i) = E(X)E(X_i) = E(X) \times 0 = 0.$$

5-a Détermination de la loi de Z_i

Tout d'abord, $X_i \in \{-1, 1\}$; donc $X_i + 1 \in \{0, 2\}$ et $\dfrac{X_i + 1}{2} \in \{0, 1\}$; de plus

$$P\left(\frac{X_i + 1}{2} = 0\right) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2} \text{ et } P\left(\frac{X_i + 1}{2} = 1\right) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}\,;$$

donc la variable $\dfrac{X_i + 1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
5-b Ainsi X est une somme de n variables indépendantes de Bernoulli, d'après le cours :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}}.$$

5-c Détermination de la projection orthogonale $p_F(X)$ de X sur F.
Par définition, $d(X, F) = \big\|X - p_F(X)\big\|$, où $p_F(X)$ est le projeté orthogonal de X sur F défini par :

$$p_F(X) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(X, X_i)X_i.$$

Or $\Phi(X, X_i) = E\left(\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j + 1}{2}\right)X_i\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} E\left(X_jX_i + X_i\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} E(X_jX_i) + \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{=\,0}$.

Si $i \neq j$, $E(X_jX_i) = 0$ et si $i = j$, $E(X_i^2) = 1$; donc $\Phi(X, X_i) = \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$\boxed{p_F(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

5-d On a démontré que X suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$, donc

$$E(X) = np = \frac{n}{2} \text{ et } V(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}.$$

Par ailleurs, $\|X\|^2 = \Phi(X,X) = E(X^2) = V(X) + \big(E(X)\big)^2$, où V est la variance de X.
(On rappelle la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.)
Et ainsi :

$$\|X\|^2 = \frac{n}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2+n}{4}.$$

5-e Ceci dit, dans la base **orthonormale** $\big(X_1, ..., X_n\big)$ de F, la variable $p_F(X)$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right);$$

donc : $\|p_F(X)\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}$.

5-f D'après le théorème de Pythagore :
$\|X\|^2 = \|p_F(X)\|^2 + \|X - p_F(X)\|^2$; soit $\|X - p_F(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|p_F(X)\|^2$.
Finalement : $\|X - p_F(X)\|^2 = \dfrac{n^2+n}{4} - \dfrac{n}{4} = \dfrac{n^2}{4}$ et donc : $\boxed{d(X,F) = \dfrac{n}{2}}$

Remarque : deuxième méthode pour déterminer la distance de X à F.

On sait que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i+1}{2}$ et $p_F(X) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$; donc :

$$X - p_F(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Et $Y = X - p_F(X)$ est ainsi une variable qui suit une loi certaine de valeur $\dfrac{n}{2}$. On écrit :

$$\|Y\|^2 = \Phi(Y,Y) = E(Y^2) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 P\left(Y = \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4}1.$$

Et ainsi $\|Y\| = \dfrac{n}{2}$. On retrouve : $\boxed{d(X,F) = \dfrac{n}{2}}$