2TSI. Devoir surveillé 05

Samedi 26 mars 2022

Durée : 4 heures. Les calculettes sont interdites, l'exercice et les différents problèmes sont indépendants.

Exercice

Dans l'espace euclidien rapporté à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, reconnaître et écrire les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Problème 01

On identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $x + iy \in \mathbb{C}$. On pose pour tout réel θ l'application $r_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{i\theta} z$.

Partie I- Rotations du plan

Ici n désigne un entier naturel non nul et on note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$.

1. Donner la matrice de la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté à $(\vec{i}, \vec{j})$ base orthonormée directe.
2. On note f_θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice de rotation que l'on a écrit à la question **1.** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f_\theta(x, y)$.
3. Justifier que r_θ est la rotation plane d'angle θ.
   On pourra pour cela montrer que l'affixe correspondante à $f_\theta(x, y)$ s'écrit $e^{i\theta}(x + iy)$ ou utiliser les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$, où $\overrightarrow{OM'}$ est l'image de $\overrightarrow{OM}$ par la rotation d'angle θ.
4. Montrer que ω_0, ω_1, ..., ω_{n-1} sont les n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
5. Montrer que pour tout $k \in [\![0,\ n-1]\!]$, on a : $r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}$.
6. Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique des quatre complexes ω_0, ω_1, ω_2, ω_3.

Partie II- Marche aléatoire sur un carré

Ici $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à une boussole centrée en O dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-i$)

On suppose que lorsque le bout de l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $1/2$ dans le sens trigonométrique et avec la probabilité $1/2$ dans le sens inverse. D'une étape à l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place. Et par exemple, si le bout de l'aiguille est à l'Ouest, à l'étape suivante, elle sera au Nord ou au Sud. Enfin, l'étape 0 symbolise la position initiale de l'aiguille.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n + 1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de la pointe de l'aiguille de la boussole à l'étape n. Ainsi, A_n prend ses valeurs dans $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$.

On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables aléatoires A_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire réelle qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n + 1$, et -1 dans le sens inverse.
Ainsi $D_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(D_n = -1) = P(D_n = 1) = \dfrac{1}{2}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n} A_n$.

T.S.V.P →

2. En utilisant le fait que $\{(A_n = 1), (A_n = i), (A_n = -1), (A_n = -i)\}$ est un système complet d'événements de Ω, justifier que
$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i).$$
3. Sans justifier, exprimer avec des formules analogues, $P(A_{n+1} = i)$, $P(A_{n+1} = -1)$ et $P(A_{n+1} = -i)$.
4. On pose dans la suite les matrices
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer Δ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Calculer l'inverse B^{-1} de B.
   (c) Montrer que M et Δ sont semblables et montrer que $B\Delta B^{-1} = M$ (sans nécessairement faire le produit des 3 matrices).
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = B\Delta^n B^{-1}$.
   Expliciter M^n sous la forme d'une seule matrice (ici le produit des 3 matrices est nécessaire).
5. On considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = i) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -i) \end{pmatrix}$ et on suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est, c'est-à-dire que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Écrire la relation entre U_{n+1}, U_n et M.
   (b) Écrire alors U_n en fonction de U_0 et de M^n.
   En déduire l'expression en fonction de $n \in \mathbb{N}$ des quatre probabilités $P(A_n = 1)$, $P(A_n = i)$, $P(A_n = -1)$ et $P(A_n = -i)$.

Problème 02

Orthonormalité des lois de Rademacher

Dans tout le problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, P) et pour X une variable aléatoire sur Ω, on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.
On dit que X suit une **loi de Rademacher** lorsque : $X(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X = -1) = P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$.
On fixe dans tout l'exercice $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie I- Un produit scalaire

On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs : $V_f(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X(\Omega) \text{ est fini }\}$.

1. Montrer que si X suit une loi de Rademacher alors $X \in V_f(\Omega)$ et montrer que $E(X) = 0$.
2. Montrer que $V_f(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   On définit l'application Ψ sur $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$ par : $\Psi(X, Y) = E(XY)$, où E désigne l'espérance et $(X, Y) \in V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$.
3. Montrer que Ψ est un produit scalaire (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive) sur $V_f(\Omega)$.

Partie II-Orthonormalité et projection

On considère $X_1, ..., X_n$ une suite de n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** et suivant toutes la même loi de Rademacher.
Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i^2)$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, calculer :
$$E(X_iX_j) = \sum_{x_i \in X_i(\Omega)} \sum_{x_j \in X_j(\Omega)} x_i x_j P\big((X_i = x_i) \cap (X_j = x_j)\big).$$
(La somme n'a que quatre termes et on remarquera que l'on a l'égalité $P\big((X_i = x_i) \cap (X_j = x_j)\big) = P(X_i = x_i)P(X_j = x_j)$ pour tous les x_i et x_j possibles.)
Retrouver le résultat en remarquant (et le justifier) que $E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j)$.
En déduire alors que $(X_1, ..., X_n)$ est une famille orthonormée dans $V_f(\Omega)$ pour le produit scalaire Ψ, c'est-à-dire que $\Psi(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $\Psi(X_i, X_i) = 1$ pour tout i.
On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, ..., X_n$.
2. Montrer que toute famille orthonormée (pour un produit scalaire quelconque) de n vecteurs est libre.
3. Déterminer la dimension de F.
4. On suppose que $X \in V_f(\Omega)$ est **indépendante** de chacune des variables $X_1, ..., X_n$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, développer
$$\Psi(X, X_i) = E(XX_i) = \sum_{x_i \in \{-1,1\}} \sum_{x \in X(\Omega)} x_i x P\big((X_i = x_i) \cap (X = x)\big)$$
sous forme de combinaisons linéaires de $E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP\big(X = x\big)$ et en déduire que $\Psi(X, X_i) = 0$.
Retrouver ce résultat en utilisant le fait que $\mathrm{Cov}\,(X, X_i) = 0$.
Justifier alors que $X \in F^\perp$, où $F^\perp$ désigne l'orthogonal de F pour le produit scalaire Ψ.
5. Soit $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}$.
   (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ fixé, on pose $Z_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$.
   Montrer que $Z_i(\Omega) = \{0, 1\}$ puis calculer $P(Z_i = 0)$ et $P(Z_i = 1)$.
   En déduire que Z_i est une loi de Bernoulli dont on donnera le paramètre.
   (b) En déduire que X est une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
   (c) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer $\Psi(X, X_i) = E\left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}\right) X_i\right)$ et en déduire la projection orthogonale $p_F(X)$ de X sur F, c'est-à-dire $p_F(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Phi(X, X_i)X_i$.
   (On trouvera que $p_F(X) = a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, où $a \in \mathbb{R}$ est à déterminer.)
   (d) Écrire $E(X)$ et $V(X)$ puis calculer $\|X\|^2 = \Psi(X, X)$.
   (e) Calculer $\|p_F(X)\|^2$.
   (On utilisera les coordonnées de $p_F(X)$ dans la base orthonormale $(X_1, ..., X_n)$ de F.)
   (f) Justifier $\|X\|^2 = \|p_F(X)\|^2 + \|X - p_F(X)\|^2$ et en déduire la distance de X à F.