Autour des suites et des fonctions réelles

■ Nombres réels

Exercice 01

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $|x+1| = |2x-3|$ et de même l'équation $|1-2x| = x+1$.

Exercice 02

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{x}{2-x} < 1$ et de même l'inéquation $\dfrac{x-2}{x-1} < \dfrac{x-1}{x-5}$.

Exercice 03

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

■ Suites réelles

Exercice 04

Traduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chacune des propositions suivantes :

$P_1 :\ \exists \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant M,\ |u_n - l| < \epsilon$. $P_2 :\ \forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant M,\ |u_n - l| < \epsilon$.

$P_3 :\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall \epsilon > 0,\ \forall n \geqslant M,\ |u_n - l| < \epsilon$. $P_4 :\ \forall n \geqslant M,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall \epsilon > 0,\ |u_n - l| < \epsilon$.

Exercice 05

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^3+1} = 0$$

en revenant à la définition d'une limite.
Indication : on pourra commencer par minorer n^3+1 par n^3.

Exercice 06

Déterminer (sans revenir à la définition) lorsqu'elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$, de :

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ b_n = (n^2)^{\frac{1}{n}},\ c_n = \frac{2^n - (-3)^n}{2^n + (-3)^n},\ d_n = 1 + \cos(n\pi),$$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},\ f_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),\ g_n = n\ln(n^2+1) - 2n\ln n,\ h_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right).$$

Exercice 07

Trouver a et b tels que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 08

1. Trouver a et b tels que $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.
2. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que (u_n) est croissante et majorer (u_n) en utilisant la première question. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 09

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \geqslant 2$, par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$$

sont adjacentes.

Exercice 10

Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et pour tout } n \geqslant 1, \left\{ \begin{array}{lcl} u_n & = & \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \\ v_n & = & \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 11

Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 12

Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2k,\ \sum_{k=0}^{n} e^{-k},\ \sum_{k=0}^{n} \left(3^{2k+2} + 2^{6k+1}\right)$.

Exercice 13

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + 11...1$, le dernier nombre étant composé de n fois le nombre 1.

1. Écrire $9S_n$ sous forme d'une différence de deux sommes.
2. En déduire $9S_n$ puis S_n.

Exercice 14

Un segment $[AB]$ a pour longueur a. On appelle M_1 le milieu de $[A, B]$, M_2 le milieu de $[B, M_1]$, M_3 le milieu de $[M_1, M_2]$, M_4 le milieu de $[M_2, M_3]$, etc.

1. Calculer la longueur de $[AM_n]$ en fonction de n.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} AM_n$.

Exercice 15

Déterminer u_n en fonction de n sachant que :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Exercice 16

Déterminer u_n en fonction de n sachant que :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0.$$

Exercice 17

Ici $a \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer u_n en fonction de n, a, u_0 et u_1 sachant que :

$$\text{pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+2} = (2-a)u_{n+1} + (a-1)u_n.$$

■ Généralités sur les fonctions réelles

Exercice 18

Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{4 - \dfrac{1}{x^2}} - 1\right)$.

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 7e^x - \ln y & = & 39 \\ 3\,e^x + 2\ln y & = & 7 \end{cases}$

Exercice 20

Résoudre l'inéquation : $\ln(x+1) + \ln(x-2) < 2\ln(3-x)$.

Exercice 21

Déterminer les réels x tels que : $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$, $\sin(3x) = \sin x$, $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 22

Déterminer les réels x tels que $\cos x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 23

Écrire $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\cos(4x)$ en fonction de $\sin x$.

Exercice 24

Déterminer les réels x tels que $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{6}$.

■ Limites et continuité d'une fonction

Exercice 25

En revenant à la définition d'une limite, montrer que $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+2x+1}{x+1}$ a pour limite $\dfrac{5}{2}$ quand x tend vers 1.

Exercice 26

On veut montrer géométriquement que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Commencer par tracer le cercle trigonométrique. On appelle I le point $(1, 0)$.
Placer un point M sur le cercle trigonométrique de telle manière que l'angle entre $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit x, un réel compris entre 0 et $\pi/2$. On note C la projection orthogonale de M sur Ox et S la projection orthogonale de M sur Oy. On note Δ la droite passant par I et orthogonale à $0x$. Cette droite coupe OM en T. On rappelle que l'aire d'un triangle est la moitié de la longueur de la base multipliée par la hauteur.

1. Calculer en fonction de x l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle (OCM).
2. Calculer en fonction de x l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle (OIT).
3. Déterminer l'aire $\mathcal{B}$ du secteur angulaire IOM en fonction de x.
4. En utilisant le fait que $\mathcal{B}$ est compris entre $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, encadrer $\frac{\sin x}{x}$. Conclure.

Exercice 27

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.
Cette fonction peut-elle être prolongée par continuité en -1 ou en 1 ?

Exercice 28

Déterminer un équivalent simple des fonctions proposées en a :

$$x \mapsto x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \text{ avec } a = +\infty, \quad x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \text{ avec } a = 0, \qquad x \mapsto \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \text{ avec } a = 4.$$

Exercice 29

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$. En considérant $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 30

Déterminer $\arcsin\left(\sin \frac{2012\pi}{3}\right)$ et $\arctan\left(\tan \frac{2012\pi}{3}\right)$.

Exercice 31

Soit $x \in [-1, 1]$, calculer $\cos(\arcsin x)$ et $\sin(\arccos x)$.

Exercice 32

Écrire $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan\theta$. Résoudre alors l'équation : $\arcsin x = 2 \arctan x$.

■ Dérivabilité d'une fonction

Exercice 33

En utilisant le nombre dérivé, déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{x}$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - 1}{x}$.

Exercice 34

1. Calculer les tangentes de $\alpha = \frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$ et de $\beta = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\text{Arctan}\, x \leqslant x$ en étudiant le signe de $\phi : x \mapsto \arctan x - x$.
3. En déduire que α et $\beta \in [0, \pi/2[$ et en déduire que $\alpha = \beta$.

Exercice 35

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$.
On considère $\Phi : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si $x \neq a$ et $\Phi(a) = 0$.

1. Démontrer que Φ est continue et dérivable sur $]a,b]$.
2. Montrer que Φ est continue en a.
3. Justifier le fait qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$.
4. Montrer alors que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$. Interprétation graphique de ce résultat ?

Exercice 36

Déterminer $\arcsin(0.5)$ puis montrer : $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin(0.6) < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{8}$.

Exercice 37

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [0,1]$ et $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \cos x_n}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$.
2. En étudiant les variations de $x \mapsto \dfrac{x + \cos x}{2}$ sur $[0,1]$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que (x_n) converge vers un réel l vérifiant $\cos l = l$.
3. Combien de solutions l'équation $\cos x = x$ a t-elle sur $[0,1]$? sur $\mathbb{R}$?
4. Preouver l'existence de $k \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - l| \leqslant k^n |x_0 - l|$.
   Comment peut-on obtenir une valeur approchée de l à 10^{-15} près ?

Exercice 38

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\left\{ \begin{array}{lcll} f(x) & = & e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) & = & 0 & \end{array} \right.$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$. Donner pour $x \neq 0$, la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f en x.
2. Montrer que f est continue à gauche en 0.
3. f est-elle dérivable à gauche en 0 ? Dans l'affirmative, donner la valeur de la dérivée à gauche de f en 0, notée $f'_g(0)$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?
4. Donner le tableau de variations de f. On fera figurer les limites en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0 (par valeurs supérieures et inférieures).
   Tracer la courbe représentative de f. On précisera les asymptotes éventuelles.

Indications : 2. Il faut montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

3. On calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ pour la dérivabilité à gauche en 0. Idem avec $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ pour la dérivabilité à droite en 0.

Exercice 39

1. Montrer que si $f : I = [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arcsin x$ alors : $\forall x \in I$, $(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$.
2. En appliquant alors la formule de Leibniz à $\left[(1 - x^2)f''(x)\right]^{(n)}$ d'une part et à $[xf'(x)]^{(n)}$ d'autre part, montrer par récurrence que pour tout $x \in I$, $(\arcsin x)^{(n)}(x) \geqslant 0$.

■ Développements limités et applications

Exercice 40

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto 3\sin(2x) - 2\sin(3x)$.
2. Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{\cos x}$.
3. Dt́erminer le $DL_3(2)$ de $x \mapsto 2^x - x^2$.

Exercice 41

Étude au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}.$$

Indications : On commencera par trouver le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis le $DL_5(0)$ de arcsin.

Exercice 42

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$.

Exercice 43

Déterminer la nature des branches infinies et la position de la courbe par rapport à cette branche infinie pour $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.