$\mathbb{C}$ et polynômes

■ Nombres complexes, module, argument, trigonométrie

Exercice 01

Pour quelles valeurs du réel λ, le nombre complexe $z = (\lambda+i)\,[\lambda + 5 - i(\lambda - 7)]$ est-il un nombre imaginaire pur ?

Exercice 02

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
Déterminer z pour que Z soit réel puis qu'il soit imaginaire pur.

Exercice 03

Condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $|z + 5| = |z - i|$.

Exercice 04

Montrer en utilisant les nombres complexes que :

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \text{ et } \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Exercice 05

En utilisant les nombres complexes, écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

Exercice 06

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$z_1 = -2i,\ z_2 = -4 + 4i,\ z_3 = \sqrt{3} + 3i,\ z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}.$$

Exercice 07

Écrire sous forme trigonométrique (pour $\phi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$)

$$z_5 = 1 + \cos\phi + i\sin\phi \text{ et } z_6 = (1 + i\tan\phi)^2.$$

Exercice 08

Calculer le module et un argument de $z_7 = \dfrac{a-b}{1-ab}$, où $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

■ Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

Exercice 09

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 10

Déterminer les racines cubiques de $-1 + i$.

Exercice 11

Déterminer les racines carrées de $3 - 4i$.

Exercice 12

On pose $a = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, on considère les deux complexes

$$S = a + a^2 + a^4 \text{ et } T = a^3 + a^5 + a^6.$$

1. Calculer $S + T$ et ST.
2. Préciser le signe de la partie imaginaire de S et de T.
3. En déduire S et T.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 + (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$, où a est fixé dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$z^4 - 2z^2 \cos(2a) + 1 = 0.$$

Exercice 15

Calcul de cosinus, de sinus, de tangentes d'angles remarquables en partant de racines carrées de complexes.

1. Déterminer les racines carrées de $1 + i$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
   En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Écrire sous forme trigonométrique et algébrique les racines carrées de $\sqrt{3} + i$.
   En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 16

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, les deux quantités

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx),$$

en utilisant la partie réelle et la partie imaginaire de $Z_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$.

■ Applications géométriques des nombres complexes

Exercice 17

Déterminer les nombres complexes z tels que les images des nombres z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle.

Exercice 18

Déterminer les nombres complexes z tels que les images des nombres 1, z et z^3 soient alignés.

Exercice 19

Dans le plan complexe, f est définie pour tout $z \neq 0$ par :

$$f(z) = z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer l'ensemble E des points M tels que M' appartienne à l'axe des réels.
3. On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer une équation de l'ensemble décrit par le point M.

■ Suites et fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Exercice 20

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ z_n - (1+i)\, z_{n-1} + i\, z_{n-2} = 0.$$

Calculer z_n en fonction de n.

Exercice 21

On veut montrer directement que $f : t \mapsto e^{it}$ admet pour limite i si t tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$e^{it} - i = 2i\, e^{i\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.
3. En déduire un majorant de $\left|e^{it} - i\right|$ en fonction de $t - \pi/2$.
Conclure en reprenant la définition de la continuité en un point.

■ Polynômes

Exercice 22

On définit par récurrence une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

1. Montrer que P_n est de degré n et trouver la valeur de son coefficient dominant.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.

Exercice 23

On définit par récurrence une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0 = 2,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, P_n est unitaire de degré n.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
3. Déterminer les complexes z tels que $z^{4n} = 1$ et $z^{2n} \neq 1$.
4. Trouver les racines de P_n.

Exercice 24

Trouver α et β pour que $X^3 - 2X + 1$ divise $X^5 + X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + 5X - 2$.

Exercice 25

Trouver le reste de la division euclidienne de $(X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 26

On pose $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$, où $n \geqslant 2$. On suppose que $a \in \mathbb{K}$ est une racine au moins double de P.
Montrer que $a = 0$. Conclure.

Exercice 27

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et on pose :

$$Z_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

Montrer que Z_n est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 28

1. Trouver deux réels a et b tels que :

$$P = X^4 + 4 = (X^2 + aX + 2)(X^2 + bX + 2).$$

   En déduire la factorisation en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Factoriser en facteurs irréductibles dans $C[X]$ le polynôme $P = X^4 + 4$.
   Retrouver la factorisation en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 29

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Décomposer $X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Trouver les racines de $z^{2n} = 1$.
3. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$,

$$X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right).$$