Révision : algèbre linéaire

■ Opérations sur les matrices. Systèmes linéaires

Exercice 01

1. Calculer le produit matriciel de $A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$.
2. Calculer le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 02

Résoudre les systèmes suivants en utilisant les opérations élementaires sur les lignes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & -1 \\ 3x-y+2z & = & 7 \\ 8x+2y-2z & = & 9 \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-2z & = & 10 \\ x+y+4z & = & -9 \\ 7x+5y+z & = & 14 \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{rcl} x-3y+7z & = & -4 \\ x+2y-3z & = & 6 \\ 7x+4y-z & = & 22 \end{array}\right.$$

Exercice 03

Résoudre le système suivant en utilisant les opérations élementaires sur les lignes, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+4z+4t & = & a \\ 3x+y-4z+6t & = & 0 \\ x-4z+t & = & b \end{array}\right.$$

Exercice 04

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ de deux manières (par récurrence et par la formule du binôme de Newton).

Exercice 05

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 06

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n antisymétriques.
Les matrices$AB - BA$ et $(AB-BA)^2$ sont-elles symétriques ou antisymétriques ?

Exercice 07

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité.
En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 08

On considère le système : $(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+3z & = & 1 \\ x+y+4z & = & -1 \\ x-2y+z & = & 0 \end{array}\right.$. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ par la méthode de Gauβ-Jordan et en déduire la solution de (S).

Exercice 09

Soit de nouveau $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On rappelle que $\mathsf{Det}\, A$ est le produit mixte des trois vecteurs colonnes de A et $Tr(A)$ désigne la trace de A, c'est-à-dire la somme des éléments de sa diagonale principale.
Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $A^3 - Tr(A)\, A^2 + \alpha\, A - \mathsf{Det}\,(A)\, I_3 = 0_3$, où 0_3 est la matrice nulle.
Retrouver l'expression de A^{-1}.

Exercice 10

On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A^2 soit une combinaison linéaire de A et de I_n.

1. Montrer que A^p, pour tout entier p, est également une combinaison linéaire de A et de I_n.
2. Application : soit $A = J_n - I_n$, avec J_n la matrice Attila (habitée par les uns) avec $n \geqslant 2$.
   Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$. Calculer A^3 en fonction de A et de I_n.
   Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1}.

■ Espaces et sous-espaces vectoriels, somme de deux sous-espaces vectoriels

Exercice 11

$G = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(1) = 1\}$ et $H = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(1) = 0\}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivant sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$:

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y+3z = 0\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ |x| = |y|\}$, $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z \geqslant 0\}$.

Exercice 13

Soit $L = \{f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}),\ \exists\, A > 0,\ \forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leqslant A\,|x|\}$.
Montrer que L est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

$F = \{(z_1,\, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_2 = \bar{z_1}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ espace vectoriel sur $\mathbb{C}$? Est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15

Soit $A = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ et $B = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f$ est constante sur $\mathbb{R}\}$.
En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x) - f(0) + f(0)$, montrer que A et B forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 16

A est un polynôme non nul fixé de $\mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ A$ divise $P\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et en trouver un supplémentaire.
Indication : on pourra penser à la division euclidienne de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par A.

Exercice 17

Dans E espace vectoriel sur K, on considère F, G, H trois s.e.v de E.
Montrer l'implication : $F \subset G \Rightarrow F + H \subset G + H$.

■ Familles libres, génératrices, bases

Exercice 18

Dans $\mathbb{K}^4$, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on considère :

$$\vec{w}_1 = (1, 2, 1, 0),\ \vec{w}_2 = (-1, 1, 1, 1),\ \vec{w}_3 = (2, -1, 0, 1),\ \vec{w}_4 = (2, 2, 2, 2).$$

Montrer que la famille $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ est libre. La famille $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3,\ \vec{w}_4)$ est-elle libre ?

Exercice 19

Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soit $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (0, -1, 2)$, $\vec{w} = (1, -2, 3)$ et $\mathcal{F} = (\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\}$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle liée ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Exercice 20

Trouver une base de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y - z = x - y = t = 0\}$.

Exercice 21

Montrer que $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3\,u_{n+1} + 2\,u_n\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Trouver une base de cet espace vectoriel.

■ Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 22

Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$.

1. Trouver une base de G.
2. On reprend les notations de l'exercice 20. Montrer que $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Exercice 23

La famille $\{Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$Q_0 = 3,\ Q_1 = 2X,\ Q_2 = X^3 + X,\ Q_3 = X^3,\ Q_4 = X^2 + 1$$

est-elle une famille libre, une famille génératrice, une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 24

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ \exists\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ P = a + (2a - 3b)X + cX^2\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base. A t-on $E = \mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 25

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille de vecteurs :

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1),\ \vec{v}_2 = (0, 1, 2, -1),\ \vec{v}_3 = (1, 0, -2, 3),\ \vec{v}_4 = (2, 1, 0, -1),\ \vec{v}_5 = (4, 3, 2, 1).$$

Ces vecteurs forment-ils :
- Une famille libre ? Sinon, donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre et éventuellement une base de $\mathbb{R}^4$.
- Une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$? Si oui, extraire au moins une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 26

On rappelle que $\mathcal{S}_3(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Trouver $\dim \mathcal{S}_3(\mathbb{K})$ et $\dim \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$.

Exercice 27

$\{(1,2),\ (-1,1)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$? Si oui, trouver les composantes de $(1,1)$ dans cette base.

Exercice 28

1. Montrer que $P = X^3 + X^2 - 2$ possède une unique racine réelle. On note a et b les deux racines non réelles de P.
2. On pose : $L_a = (X-1)(X-b)$, $L_b = (X-a)(X-1)$, $L_1 = (X-a)(X-b)$.
   Montrer que la famille (L_a, L_b, L_1) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
3. Trouver $R \in \mathbb{C}_2[X]$ tel que : $R(1) = 1$, $R(a) = b$ et $R(b) = a$.

Exercice 29

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\vec{v}_1 = (1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,2,a)$, $\vec{v}_3 = (-1,a,2)$, $\vec{v}_4 = (1,2,3)$.
Étudier si cette famille est libre ou génératrice de $\mathbb{R}^3$ en étudiant le rang de la matrice des vecteurs colonnes associé.

Exercice 30

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et G l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a' & 3a'+b' \\ -b' & -2a'+b' \end{pmatrix}$, où $(a',b') \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Puis que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 31

Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-z+t = x-3y-2z = 0\}$.

Exercice 32

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement part, d'une part les vecteurs $(2,3,-1)$, $(1,-1,-2)$ et $(3,7,0)$, $(5,0,-7)$ d'autre part.

1. Déterminer une base de F et de G
2. Déterminer une équation qui caractérise F.
3. Montrer que $F = G$.

■ Applications linéaires. Lien avec les matrices

Exercice 33

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires :

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2x - 3y.\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+2y-z,\ x+y-3z).$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x^2+2y,\ x-y).\ f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+y+z,\ x+y-z+1).$$

Exercice 34

Dans chacun des cas suivants, a t-on un endomorphisme de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$?

$$\phi : [x \mapsto y(x)] \mapsto [x \mapsto y''(x) + xy'(x) + 2021y(x)],\ \psi : [x \mapsto y(x)] \mapsto [x \mapsto y'(x) + 2021y^2(x)].$$

Exercice 35

On pose $E = \text{Vect}(x \mapsto 1,\ x \mapsto \sin x,\ x \mapsto \cos x)$.

1. La famille $(1, \sin, \cos)$ est-elle une base de E ?
2. On pose $d(f) = f'$. Montrer que l'application d est un endomorphisme de E.
3. Montrer que $d^3 + d = o$.
4. Écrire la matrice M de d dans la base (1, sin, cos). Retrouver $d^3 + d = o$ en usant de M.

Exercice 36

On pose $f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que f est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Écrire la matrice de f dans la base canonique de $(1, X, X^2)$.

Exercice 37

Dans $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme ϕ dont la matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ est : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & -8 & 12 \end{pmatrix}$.

Exercice 38

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $f :\ X \mapsto -X + (Tr(X))\, A$.

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Montrer que si $Tr(A) \neq 1$ alors f est bijective.
3. On suppose $Tr(A) = 1$. Montrer que $\mathsf{Ker}\, f = \text{Vect}\,(A)$ et $\mathsf{Im}\, f = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ Tr(X) = 0\}$.

Exercice 39

E et F étant deux espaces vectoriels sur K, on considère ϕ et ψ deux applications linéaires de E dans F. Montrer les inclusions : $\mathsf{Im}\,(\phi + \psi) \subset \mathsf{Im}\,\phi + \mathsf{Im}\ \psi$ et $\mathsf{Ker}\,\phi \cap \mathsf{Ker}\,\psi \subset \mathsf{Ker}\,(\phi + \psi)$.

Exercice 40

Dans E, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on considère deux endomorphismes ϕ et ψ qui commutent : $\phi\, o\, \psi = \psi\, o\, \phi$. Montrer que $\mathsf{Im}\,\phi$ et $\mathsf{Ker}\,\phi$ sont stables par ψ, c'est-à-dire : $\psi(\mathsf{Im}\ \phi) \subset \mathsf{Im}\,\phi$ et $\psi(\mathsf{Ker}\ \phi) \subset \mathsf{Ker}\,\phi$.

Exercice 41

Dans E, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on considère deux endomorphismes ϕ et ψ qui commutent : $\phi\, o\, \psi = \psi\, o\, \phi$. Montrer l'implication : $E = \mathsf{Ker}\,\phi \oplus \mathsf{Ker}\,\psi \Rightarrow [\mathsf{Im}\ \phi \subset \mathsf{Ker}\,\psi$ et $\mathsf{Im}\,\psi \subset \mathsf{Ker}\,\phi]$.

Exercice 42

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définies par leurs matrices respectives A et B par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Ker} g$.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.
3. Déterminer la matrice de $h = f\, o\, g$ dans la base canonique. h est-elle bijective ?

Exercice 43

Dans $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, déterminer avec des opérations élémentaires une équation de l'image de l'endomorphisme ϕ dont la matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ est : $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 44

Existe t-il des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ou surjectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 45

On fixe a et b deux **réels distincts**. Et soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(a) = P(b) = 0\}$ et ϕ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, qui à P associe $P(a)\,X + P(b)$.

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, donner sa dimension.
2. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver $\operatorname{Ker} \phi$ et $Rg\,(\phi)$.

Exercice 46

Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi) = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Et on pose la base $\mathcal{B}' = (e'_1 = e_1 - 3e_3,\ e'_2 = e_2 + 2e_3,\ e'_3 = -3e_1 + 2e_2 - e_3)$.

1. Calculer $\phi(e'_1)$, $\phi(e'_2)$,$\phi(e'_3)$ en fonction de e'_1, e'_2, e'_3. En déduire la matrice $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ de ϕ dans $\mathcal{B}'$.
2. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}. Retrouver $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$.
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[M_{\mathcal{B}'}(\phi)]^n$ puis écrire $[M_{\mathcal{B}}(\phi)]^n$ sous forme du produit de trois matrices.

Exercice 47

Écrire la matrice P de la projection sur $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = z\}$ dans la direction de $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ et celle Q de la projection sur G dans la direction sur F.
Vérifier ensuite que $P + Q = I_3$.

Exercice 48

Montrer que l'endomorphisme p de matrice $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est une projection vectorielle dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 49

Écrire la matrice de la symétrie vectorielle par rapport à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = z\}$ dans la direction de $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.

Exercice 50

Montrer que l'endomorphisme s de matrice $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une symétrie vectorielle dont on donnera les éléments caractéristiques.