Révision : probabilités discrètes finies

■ Exercices de dénombrements

Exercice 01

Combien y a t-il de façons choisir 5 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes telles qu'elles soient de cinq niveaux différents ?

1. en supposant qu'il y a un ordre dans la main ;
2. en supposant qu'il n'y a pas d'ordre dans la main.

Starter
1. Un niveau est roi, dame, valet etc. L'ordre signifie qu'on prend une carte (aucun contrainte au début) puis cette carte dans la main, on en prend une autre mais avec la contrainte qu'elle ne soit pas du même niveau, etc.
2. On peut choisir les 5 niveaux (parmi 13) puis les 5 niveaux étant fixés, il reste à prendre une carte de chaque niveau. On rappelle que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ est le nombre de choisir p éléments parmi n. On rappelle que $0! = 1$ et que $n!$ est le produit des entiers de 1 à n pour n non nul et que n^p est le nombre d'applications d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments.

Exercice 02

Combien y a t-il d'anagrammes distinctes du mot mathematique ?
(On ne comptera pas les accents.)

Starter : Une anagramme est une permutation des lettres de ces mots. On rappelle que $n!$ est le nombre de permutations de n éléments distincts.

Exercice 03

En France, chaque véhicule possède une immatriculation composée de sept caractères : deux lettres, un tiret, trois chiffres, un tiret et deux lettres. Par exemple, BY-337-MA. Les lettres I,O et U ne sont pas utilisées du fait de leur ressemblance avec 1, 0 et V. Par ailleurs les séries SS et WW ne sont pas utilisés dans le bloc de gauche et la série SS n'est pas utilisée dans le bloc de droite. Enfin la série de chiffres démarre à 001. Selon ces données, combien d'immatriculations différentes peut-on attribuer ?

Starter
On pourra utiliser encore le fait que n^p est le nombre d'applications d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments.

Exercice 04

Donner une justification combinatoire de chacune des formules suivantes :
$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$;
$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$;
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Starter
Pour la première, fixer un élément a de l'ensemble de cardinal n considéré et distinguer les parties à k éléments de cet ensemble contenant cet élément a des parties à k éléments ne contenant pas a.
Pour la seconde, imaginer deux façons de procéder pour un entraîneur devant former une équipe de k joueurs et choisir un capitaine à cette équipe.
Pour la troisième, compter le nombre total de parties d'un ensemble de cardinal n, puis faire la somme des nombres de parties de cardinal k, k variant de 0 à n.

■ Exercices de probabilités sur un univers fini

Exercice 05

On considère un dé à six faces et on suppose qu'il n'est pas équilibré, c'est-à-dire que les probabilités d'apparition respectives des faces $1, ..., 6$ sont six termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $1/3$. Déterminer la probabilité d'apparition de chacune des faces du dé.

Starter
On note p_i la probabilité d'obtenir la face numéro i puis on écrira p_2 en fonction de p_1, P_3 en fonction de p_1 etc.

Exercice 06

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

1. A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0.9$ et $P(B) = 0.8$.
   Montrer que $P(A \cap B) \geqslant 0.7$.
2. Montrer que pour tous événements A et B, $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

Starter
On rappelle que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercice 07

On lance deux dés usuels non pipés.
Quelle est la probabilité qu'au moins un des dés amène un point pair ?

Starter
On calculera la probabilité de l'événement contraire.

Exercice 08

Nous sommes en 2258 et la grande exode vers la planète ***Integrationa*** commence pour les 20000 rescapés du conflit qui a rendu la Terre et ses classes prépas invivables de façon définitive. Il s'agit d'envoyer l'une après l'autre 20 fusées géantes interplanétaires avec 1000 survivants dans chacune. Le problème, c'est que les fusées ne sont pas très fiables et qu'une fusée a une probabilité $p = 0.15$ d'exploser en vol ou de se perdre dans l'espace.

1. Calculer la probabilité que 15000 personnes arrivent au bout du compte sur ***Integrationa***.
2. Calculer la probabilité que malheureusement il faille attendre la troisième fusée pour avoir enfin le premier ≪ ***aintégrationage*** ≫.

Starter
Pour la première question, l'idée est d'aligner 20 cases qui correspondent au voyage interstellaire de chaque fusée. On met une croix sur les fusées qui n'atteignent pas le but voulu. Supposons qu'il y en ait k. Le nombre de possibilités est donc de choisir les k cases parmi 20 à rayer. Puis, il reste à calculer la probabilité d'un tel choix. Tous ces choix étant différents (au moins une case rayée change à chaque choix), ils sont incompatibles.
Pour la deuxième question, on se moque des 17 lancers qui suivent le troisième.

Exercice 09

Dans le métro toulousain. 25 voyageurs attendent le métro à la station Minimes-Claude Nougaro de la ligne B. Une rame de 5 wagons arrivent. Elles sont vides sauf une seule qui contient une personne : James. On suppose que chaque wagon peut contenir jusqu'à 26 personnes et que tous les wagons sont équiprobables pour un voyageur.

1. Calculer la probabilité que deux des voyageurs seulement choisissent d'être dans le wagon de notre ami James.
2. On suppose maintenant que, parmi les 25 voyageurs, il y a 8 mamies avec leurs 8 toutous préférés (qui ne sont pas comptés comme voyageurs et voyagent forcément avec leur maîtresse). Calculer la probabilité que James ne subisse aucun chien dans sa voiture (les voyageurs qui ne sont pas des mamies n'ont plus de contraintes vis à vis de James).

Exercice 10

Once upon a time. Le grand méchant loup mange des petits chaperons rouges et des nains. Dans la clairière, il y a 5 chaperons rouges constitués de deux filles et trois garçons et de 7 nains constitués de trois filles et de quatre garçons. Notre sympathique loup attrape et mange au hasard deux de ces 12 individus. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Les deux sacrifiés sont des nains.
2. Les deux sacrifiés sont des filles.
3. Les deux sacrifiés sont du même type (nain ou chaperon rouge).
4. Les deux sacrifiés sont du même type (nain ou chaperon rouge) et de sexe opposé.

Starter
On peut appliquer deux méthodes : calculer le rapport entre le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles ou alors prendre un sacrifié l'un après l'autre et faire le produit de deux probabilités (ce qui revient à la formule des probabilités composées).

Exercice 11

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
On sait que $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cup B) = \dfrac{4}{9}$. Calculer $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$ et $P_B(A \cap \overline{B})$.

Starter
On applique l'indispensable formule : $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$. On pourra penser à la distributivité.

Exercice 12

On lance un dé parfait à 5 faces (mais oui...), donc numéroté de 1 à 5, un grand nombre de fois. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire. Calculer p_1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire p_n.

Starter Notons A_n l'événement : « la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers est paire ». A_n et $\overline{A_n}$ constituent un système complet d'événements, d'où :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n}).$$

On a clairement $p_n = P(A_n)$ et $p_{n+1} = P(A_{n+1})$.
Il s'agit ici alors ici d''étudier une suite arithmético-géométrique définie par $p_{n+1} = a\,p_n + b$. On recherche le point fixe α de $f\,:\,x \mapsto ax + b$, puis on montre que la suite auxiliaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = p_n - \alpha$ est géométrique. On peut ainsi calculer son terme général, puis en déduire p_n.

Exercice 13

Soient n urnes numérotées de 1 à n. $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéro k contient n boules noires et k boules blanches. On tire au hasard une urne et dans cette urne une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ? Que vaut cette probabilité si n est grand ?

Starter On pose par exemple U_k l'événement qui consiste à choisir l'urne numéro k et N l'événement qui consiste à obtenir une boule noire. On calcule rapidement $P(U_k)$ et $P_{U_k}(N)$.
Puis on utilise

$$P(N) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k) P_{U_k}(N).$$

On pensera alors à des encadrements avec des intégrales ou on utilisera la formule :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt,$$

où f est continue sur $[0, 1]$. C'est la formule des **sommes de Riemann**.

Exercice 14

U_1 et U_2 sont deux urnes contenant des boules blanches et noires. U_1 contient 75% de boules blanches et U_2 50%. De plus, U_1 contient trois fois plus de boules que U_2. On mélange les boules de U_1 et U_2 dans une même urne U de laquelle on tire au hasard une boule. On constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

Starter

Considérons les événements U_1 : ≪ la boule tirée de U provient de U_1 ≫et B l'événement : ≪ la boule tirée de U est blanche ≫.

La question est : calculer la probabilité de U_1 conditionnée par B, $P_B(U_1)$, autrement dit : $\dfrac{P(B \cap U_1)}{P(B)}$ ou $\dfrac{P_{U_1}(B)P(U_1)}{P(B)}$.

Exercice 15

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, A, B des événements.

Montrer : si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$, le sont aussi.

Starter

On pourra utiliser la réunion disjointe $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Exercice 16

Soit n un entier supérieur ou égal à n. Une famille a n enfants. On note G_k l'événement : ≪ le $k^{\text{ème}}$ enfant est du sexe masculin ≫. On suppose que pour tout k, $P(G_k) = 1/2$ et que les événements $G_1, ..., G_n$ sont mutuellement indépendants.

On note A_n l'événement : ≪ la famille a des enfants des deux sexes ≫ et B_n l'événement : ≪ la famille a au plus une fille . ≫

1. On suppose $n = 2$. Calculer $P(A_2)$, $P(B_2)$. Montrer que A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.
2. On suppose $n = 3$. Montrer que A_3 et B_3 sont indépendants.
3. Montrer par un graphique que A_n et B_n ne sont pas indépendants pour $n \geqslant 4$.

Starter

On pourra poser F_i : ≪ le $i^{\text{ème}}$ enfant est de sexe féminin. ≫

Pour démarrer, on remarquera que $A_2 = (G_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap G_2)$.

Dans le cas général, on remarquera que $\overline{A}_n = (G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n)$. Puis que B_n est la réunion de deux cas incompatibles (il y a aucune naissance de fille ou alors une fille exactement naît avec alors n rangs possibles pour celui de la naissance de cette fille). Il s'agira de comparer $P(A_n \cap B_n)$ et $P(A_n) \times P(B_n)$. Enfin, pour $n \geqslant 4$, $P(A_n \cap B_n) - P(A_n) \times P(B_n) = 0$ doit être, à la fin de vos calculs, équivalent à l'égalité :$n + 1 = 2^{n-1}$. On termine graphiquement.