Variables aléatoires réelles discrètes finies

■ Lois de probabilité de variables aléatoires discrètes

Exercice 01

Soit X une v.a.r à valeurs dans $[\![0,5]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![0,5]\!]$, $P(X=k)=\alpha\, k$.

1. Déterminer α pour que X soit effectivement une loi de probabilité.
2. Écrire les lois de X et de X^2.

Exercice 02

On lance deux dés cubiques non pipés et X est la v.a.r.d égale à la somme des points obtenus.
Déterminer la loi de X.

Starter On a 36 couples (i,j) possibles. Donc pour tout k entier entre 2 et 12, $P(X=k)$ est le rapport entre le nombre de couples (i,j) dont la somme $i+j$ vaut k et le nombre 36.

Exercice 03

On considère la variable aléatoire définie par le tableau :

k	0	1	2	3
P(X=k)	1/5	1/2	λ	1/10

.

1. Déterminer λ pour que X représente une loi de probabilité.
   On prendra ce λ dans la suite.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition F_X de X, c'est-à-dire la fonction :
   $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_X(t)=P(X \leqslant t)$.
   Quels sont les propriétés de cette fonction ? En déduire $P(0.5 < X < 2.3)$ en utilisant F_X.

Starter
1. On rappelle que la somme des probabilités doit faire 1.
2. Pour $V(X)$, utiliser $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$.
3. On remarquera ici que $F_X(t)=0$ pour $t<0$, puis que $F_X(t)=P(X=0)$ pour $t \in [0,1[$, etc.

Exercice 04

Un sujet de concours comporte 20 erreurs typographiques. lors de la relecture, une erreur a la probabilité $p=\dfrac{3}{4}$ d'être détectée par un correcteur et il y a indépendance entre la détection des différentes erreurs.

1. Déterminer la loi de probabilité du nombre d'erreurs non détectées ainsi que son espérance.
2. Calculer ensuite cette espérance si le sujet est soumis à 2 relectures indépendantes.

Starter
1. On pensera à une loi classique.
2. Chaque erreur a la probabilité $(1/4)^2=1/16$ de ne pas être détectée après deux lectures indépendantes.

T.S.V.P →

Exercice 05

On considère des étudiants de TSI2 que l'on veut stimuler pour les rendre plus doués. Des tests cliniques ont prouvé que 20% de cette population devient significativement plus douée (leur QI augmente d'au moins 20 points) quand on administre une substance particulière. On isole 31 étudiants de TSI2 (c'est l'effectif de Saint Orens de Cobayeville). Leur professeur de Mathématiques leur injecte la substance. On appelle X le nombre d'étudiants de cette classe qui est stimulée significativement.

1. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$ et $v(X)$.
2. Calculer la probabilité que seulement 4 au plus des 31 élèves soient stimulés significativement.

Exercice 06

Soit X une variable aléatoire avec $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$.

1. Calculer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.
2. On suppose $p = \dfrac{1}{2}$ et $a > 0$. Calculer $E\left(\dfrac{a^X}{2n}\right)$.

Exercice 07

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec une probabilité $p \in]0,1[$ et face avec une probabilité $q = 1-p$. On fait n lancers successifs de la pièce. On introduit la notion de **séries de lancers** amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi la première série est de longueur $m \in [\![1, n-1]\!]$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)^{\text{ème}}$ l'autre côté et de longueur n si les n lancers ont amené le même côté. Si la longueur de la première série est égale à $m < n$, la deuxième série commence au $(m+1)^{\text{ème}}$ lancer et ainsi de suite. Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou de face au bout de n lancers. Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, on note P_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ lancer amène pile » et F_i l'événement contraire. Enfin, $k \in \mathbb{N}^\star$.

1. On note L_1 la $v.a.r$ donnant la longueur de la première série.
   (a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$.
   (b) On suppose $m < n$. Exprimer $(L_1 = m)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, m+1]\!]$. En déduire $P(L_1 = m)$.
   (c) Exprimer $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   En déduire $P(L_1 = n)$.
   Vérifier que $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m) = 1$.
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série, s'il y en a une, et on note $L_2 = 0$ sinon.
   (a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.
   (b) On suppose que $m + k < n$. Exprimer $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, m+k+1]\!]$. En déduire $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k))$.
   (c) On suppose que $m + k = n$. Exprimer $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k))$.
   (d) En déduire la valeur de $P(L_2 = k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer $P(L_2 = 0)$.

Starter

1. $[L_1 = m]$ signifie qu'il y a eu soit m fois pile puis face (événement A_1), soit m fois face puis pile (événement A_2). On peut exprimer A_1 et A_2 en fonction des P_i et des F_i.

Puis on a : $P(L_1 = m) = P(A_1) + P(A_2)$. On rappelle par ailleurs que $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} p^m = p\frac{1-p^{m-1}}{1-p}$.

■ Étude d'un couple et d'une somme de variables aléatoires discrètes

Exercice 08

On définit la loi d'un couple (X, Y) de v.a.r avec $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. De plus,

$$P((X,Y) = (1,1)) = P((X,Y) = (3,3)) = 0,\ P((X,Y) = (1,2)) = P((X,Y) = (2,1)) = a$$

$$P((X,Y) = (1,3)) = P((X,Y) = (3,1)) = 0.1,\ P((X,Y) = (2,2)) = 0.3$$

$$P((X,Y) = (2,3)) = 0.1,\ P((X,Y) = (3,2)) = 0.2$$

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

Exercice 09

X est une variable aléatoire réelle qui suit une loi uniforme sur $X(\Omega) = [\![-2, 2]\!]$.

1. Définir explicitement la loi de probabilité de X.
2. Définir la loi du couple (X, X^2). Donner les lois marginales.
3. Calculer $E(X)$ et $E(X^3)$.

Starter **2.** On veut calculer $P(X = x, X^2 = y)$ pour $x \in [\![-2, 2]\!]$ et tout $y \in \{0, 1, 4\}$.

Exercice 10

Monde cruel ! Dans un bassin, nagent 100 poissons rouges, 200 poissons bleus, 300 poissons jaunes et 400 poissons gris indépendamment les uns des autres et croyant pouvoir barboter jusqu'à la fin des temps. Un cruel coup d'épuisette ramène, au hasard, $n < 100$ poissons de diverses couleurs, chaque poisson ayant la même probabilité d'être pêché. On note Y_r, Y_b, Y_j et Y_g les variables aléatoires donnant les nombres ramenés respectivement de poissons rouges, bleus, jaunes et gris.
Calculer : $P((Y_r = r) \cap (Y_b = b) \cap (Y_j = j) \cap (Y_g = g))$.
Application numérique : $n = 10$, $r = 2$, $b = 2$, $j = 3$ et $g = 3$.

Starter
On déterminera le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. On rappelle que $\binom{N}{n}$ désigne le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à N éléments.

Exercice 11

Les variables aléatoires X et X^2 de l'exercice 09 sont-elles indépendantes ?

Exercice 12

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, indépendantes.
Déterminer les lois de $X + Y$ et de $X - Y$.
Ces deux variables aléatoires peuvent-elles être indépendantes ?

Starter
On remarquera que $(0 - Y)X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que $(X + Y)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Puis on calcule les probabilités $P(X + Y = k)$ et $P(X - Y = k)$ pour tous les k possibles.
Ainsi la probabilité $P(X - Y = -1)$ par exemple vaut $P(X = 0) \times P(Y = 1)$.

T.S.V.P →

Exercice 13

On reprend les variables aléatoires réelles discrètes X et Y du premier exemple du cours dans le paragraphe sur les couples de variables aléatoires discrètes (entreprise employant 10 salariés).
Calculer successivement les quantités $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ et $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$.

Exercice 14

Soient V_1, V_2 et V_3 trois variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{0,1\}$ (ce sont donc des variables de Bernoulli) et on suppose qu'il existe trois réels p_1, p_2 et p_3 dans $]0,1[$ tels que $p_1+p_2+p_3=1$ et on suppose que :

$$P((V_1=i)\cap(V_2=j)\cap(V_3=k))=\begin{cases} p_1 & \text{si} \quad j=k=1,\, i=0 \\ p_2 & \text{si} \quad i=k=1,\, j=0 \\ p_3 & \text{si} \quad i=j=1,\, k=0 \\ 0 & \qquad \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la loi du couple $(V_1,\, V_2)$.
2. En déduire les paramètres respectifs des lois de Bernoulli V_1, V_2 et V_3.
3. On pose $S=V_1+V_2+V_3$. Calculer $P(S=2)$ et en déduire la loi de probabilité de S.
   Que vaut la variance $V(S)$?
4. Calculer $E(V_1V_2)$ puis montrer que $\mathrm{Cov}\,(V_1,V_2)=-p_1p_2$ et la variance $V(V_1)=p_1(1-p_1)$.
5. On appelle matrice de covariance des variables V_1, V_2 et V_3 la matrice carrée d'ordre 3 avec $K=(k_{i,j})$, où pour tout $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$, $k_{i,j}=\mathrm{Cov}\,(V_i,V_j)$.
   Écrire cette matrice en fonction de p_1, p_2 et p_3.

Starter
1. On veut calculer les probabilités $P(V_1=i,V_2=j)=P((V_1=i)\cap(V_2=j))$ pour tout couple (i,j) d'entiers égaux à 0 ou à 1 et on utilise la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements : $\{(V_3=0),\,(V_3=1)\}$.
Ainsi, par exemple :
$P((V_1=0)\cap(V_2=0))=P((V_1=0)\cap(V_2=0)\cap(V_3=0))+P((V_1=1)\cap(V_2=1)\cap(V_3=1))$.
2. L'idée est de déterminer d'abord la loi de V_1, c'est-à-dire $P(V_1=i)$ pour tout i, en utilisant maintenant la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements : $\{(V_2=0),\,(V_2=1)\}$.
Puis on détermine de même les lois de V_2 et de V_3. On sait que $P(V_i=1)$ est le paramètre de la loi de Bernoulli V_i.
3. On trouvera $P(S=2)=1$.
4. On se rappelera l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli. Pour le calcul de $E(V_1V_2)$, c'est une somme de quatre quantités dont trois nulles ici.
5. On pourra raisonner par permutation circulaire.

Exercice 15

Sur un axe $(O,\vec{i})$, une puce, placée initialement en O se déplace par translations successives de vecteur $\vec{i}$ ou $-\vec{i}$ (c'est-à-dire qu'au bout d'un saut, elle est en -1 ou 1 et au bout de deux sauts, elle peut être en -2, 0 ou 2, *etc.*) La probabilité pour un saut donné que la puce effectue une translation de vecteur $\vec{i}$ est $p=0.4$ et que la puce effectue une translation de vecteur $-\vec{i}$ est $q=0.6$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, la puce effectue n sauts successifs. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de translations de vecteur $\vec{i}$ et Y la variable aléatoire qui prend le nombre de translations de vecteur $-\vec{i}$ effectuées par notre amie la puce au cours des n sauts.

1. Justifier que $X\sim\mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de Y ?
2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.
3. Soit $T=X-Y$. Que représente T ? Justifier que $T=2X-n$. Calculer $E(T)$ et $V(T)$.
4. Vérifier que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 16

On lance deux dés cubiques et équilibrés.
On note X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus pour chacun des deux dés. Soit $X = \min(X_1, X_2)$ le minimun et $Y = \max(X_1, X_2)$ le maximum des points obtenus avec les deux dés.

1. Donner la loi de X et son espérance.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de X_1 et X_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de X_1 et de X_2. Calculer $E(XY)$ puis $\text{Cov}(X, Y)$.

Starter
1. On remarquera qu'ici $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et on calcule $P(X = k)$ en divisant le nombre de cas favorables par 36.

Exercice 17

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, on admet que l'on définit Y une variable aléatoire sur le même espace de probabilité par : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 \max(X(\omega), t)\, dt$.

1. Ici $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$. Montrer que $Y(\Omega) \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [\![1, n]\!]$ et trouver sa loi.
2. On suppose ici $X(\Omega) = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ et $P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$.
   (a) Donner la loi de Y ainsi que $E(Y)$.
   (b) Soit $Z = XY$. Justifier que $Z(\Omega) = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{16}, 4\right\}$. Déterminer la loi de Z.
   (c) Calculer $E(Z)$ puis $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 18

On jette un dé équilibré 3600 fois. On note S le nombre de fois où 1 apparaît.

1. Quelle est la loi suivie par S ? On donnera ses paramètres. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.
   Starter : on pensera à Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 19

Une urne contient 3 boules numérotées $1, 2$ et 3. On effectue une suite de 100 tirages d'une boule avec remise depuis cette urne et l'on note X_i le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée. On pose $S = X_1 + ... + X_n$.

1. Calculer $E(X_i)$ puis $E(S)$ puis $V(X_i)$ et $V(S)$.
2. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier s tel que $P(|S - E(S)| < s) \geqslant 0.9$.

Exercice 20

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on suppose que n personnes déposent leur chapeau à un vestiaire et repartent en prenant chacune un chapeau au hasard. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de personnes partant avec leur propre couvre chef.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k est la variable aléatoire égale à 1 si le $k^{\text{ème}}$ individu repart avec son chapeau et 0 sinon. Donner une relation entre X et les variables aléatoires X_k.
2. Déterminer $P(X_k = 1)$. Reconnaître la loi de X_k.

Starter
1. On fera le lien avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
2. On rappelle que X_k prend pour valeur 0 et 1.