INTEGRATION

■ Intégration sur un segment

Exercice 01

Écrire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{p}{n^2e^{p/n}}$ sous la forme d'une intégrale.

Starter : On pensera à une somme de Riemann.

Exercice 02

1. En utilisant la décroissance de $x\mapsto\dfrac{1}{x}$, montrer : $\displaystyle\int_{n+1}^{2n+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}<\int_{n}^{2n}\frac{dx}{x}$ pour tout $n\geqslant 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=n}^{2n}\dfrac{1}{p}$.
2. Retrouver le résultat précédent avec les sommes de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Exercice 03

Pour $x>1$, on pose : $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}$.
Justifier que f est bien définie et calculer sa dérivée. Que constate t-on ?

Starter : On rappelle que pour tout a réel fixé, si f est continue et ϕ dérivable alors $x\mapsto\displaystyle\int_{a}^{\phi(x)}f(t)\,dt$ est dérivable et a pour dérivée $x\mapsto\phi'(x)\times f(\phi(x))$.

Exercice 04

Un bon lot de primitives à trouver

$$F_1=\int\frac{t}{1+t^2}\,dt,\ F_2=\int\frac{t}{1+t}\,dt,\ F_3=\int t\,\ln t\,dt,\ F_4=\int\tan t\,dt,$$

$$F_5=\int\frac{2}{\sin^2 t}\,dt,\ F_6=\int\frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\ F_7=\int t^2\,e^{t^3}\,dt,\ F_8=\int\cos t\,\cos(\sin t)\,dt,$$

$$F_9=\int\tan^2 t\,dt,\ F_{10}=\int\frac{t^3}{1+t}\,dt,\ F_{11}=\int\frac{1}{3+t^2}\,dt,\ F_{12}=\int\arcsin t\,dt,$$

$$F_{13}=\int\arctan t\,dt,\ F_{14}=\int\sqrt{1-t}\,dt,\ F_{15}=\int(t^2+t+2)\,\sin t\,dt.$$

Starter :
Pour F_2, on remarque que $t=1+t-1$.
Pour F_3, on fera une intégration par parties.
Pour F_4, on écrit $\tan t=\dfrac{\sin t}{\cos t}$ et on pense que la dérivée de cos est...
Pour F_5, on pourra commencer par dériver $\operatorname{cotan} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.
Pour F_6, on pourra couper en deux l'intégrale car le numérateur est une somme de deux termes.
Pour F_7, on fera une intégration par partie.
Pour F_8, on fera le bon changement de variable en disant que $\cos t$ est la dérivée de...
Pour F_9, on pensera à la dérivée de $\tan t$.
Pour F_{10}, on usera de $t^3+1=(t+1)(t^2-t+1)$.
Pour F_{12}, on appliquera la méthode belge : $\arcsin t$ vaut une fois $\arcsin t$.
Enfin, pour F_{13}, idem et F_{15}, encore une intégration par partie.

Exercice 05

Un bon lot d'intégrales définies à calculer

$$I_1=\int_e^{e^2}\frac{dt}{t\ln t}\,dt,\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt,\ I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos t},\ I_4=\int_0^{7}\frac{dt}{\sqrt{t+1}+(t+1)^{\frac{1}{3}}},$$

$$I_5=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt,\ I_6=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+e^t}},\ I_7=\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+1}\,dt,$$

$$I_8=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3 t\,dt,\ I_9=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt,\ I_{10}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(2t)}{\sin t}\,dt,\ I_{11}=\int_0^{x}\frac{dt}{1+t^3}\,dt.$$

Starter :
Pour I_2, on fait le bon changement de variable.
Pour I_3, on multipliera le haut et le bas de la fonction à intégrer par $\cos t$.
Pour I_4, on posera le changement de variable $x=(1+t)^{\frac{1}{6}}$.
Pour I_5, on posera le changement de variable $t=\sin x$.
Pour I_6, on posera le changement de variable $x=\sqrt{1+e^t}$.
Pour I_7, on mettra t^2+t+1 sous forme canonique.
PourI_8, on linéarisera $\cos^3 t$.
Pour I_9, on cherchera $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}=\dfrac{a}{1+t}+\dfrac{b}{1-t}+\dfrac{c}{1+t^2}$.
Pour I_{10}, on posera le changement de variable $t=\cos x$.
Et enfin, pour I_{11}, on supposera déjà $x>-1$ et on cherchera $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, tel que

$$\frac{1}{1+t^3}=\frac{a}{1+t}+\frac{b\,t+c}{t^2-t+1}.$$

Exercice 06

Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(1)=g'(1)=0$.
Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 t^n g(t)\,dt$.
Starter : On pensera à deux intégrations par parties successives.

Exercice 07

Soit l'intégrale de John Wallis (1616-1703) : $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Trouver une relation entre I_n et I_{n-2} pour $n\geqslant 2$.
   Starter : On écrit $\sin^n x=\sin x\times\sin^{n-1}x$ puis on intègre $x\mapsto\sin x$ et on dérive $x\mapsto\sin^{n-1}x$ et on fait bien entendu une IPP.
3. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} pour tout $p\in\mathbb{N}$.

Exercice 08

Soit $G: x\mapsto\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

1. Trouver le domaine de définition de G.
2. Avec le changement de variable $u=-t$, montrer que G est impaire.
3. Calculer $G'(x)$ pour tout x.
   Starter : on rappelle que pour tout a réel fixé, si f est continue et ϕ dérivable alors $x\mapsto\displaystyle\int_a^{\phi(x)}f(t)\,dt$ est dérivable et a pour dérivée $x\mapsto\phi'(x)\times f(\phi(x))$.

4. Calculer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+2t^2+1}}$ et $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4}}$.
   En déduire que pour tout $x \neq 0$, $\arctan(2x) - \arctan x < G(x) < \dfrac{1}{2x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x)$.

Exercice 09

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t^2}\, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 puis démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4n+4} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+2}.$$
   En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.
2. Montrer : $I_n = \dfrac{1}{4(n+1)} + \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{(1+t^2)^2}\, dt$.
3. Montrer : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{(1+t^2)^2}\, dt \leqslant \frac{1}{2n+4}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nI_n$.

Exercice 10

Écrire la formule de Brook Taylor (1685-1731) avec reste intégral à l'ordre 2 à $\cos x$ et prouver, sans étude de fonction, que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

■ Intégration sur un intervalle

Exercice 11

Déterminer la nature des intégrales généralisées, en revenant à la définition d'une intégrale généralisée convergente :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t\, dt,\ I_2 = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t\, \ln t},\ I_3 = \int_3^{+\infty} \frac{tdt}{t^2-1},$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}},\ I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(1+t)}.$$

Exercice 12

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t}\right) dt$.
   Starter. Montrer que : $\forall u \geqslant 0$, $\arctan u \leqslant u$ et en user.
2. Trouver sa valeur éventuelle en commençant par calculer $\displaystyle\int_0^x t \arctan \frac{1}{t}\, dt$.
   Starter : penser à une intégration par parties.

Exercice 13

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\, dt$ et idem pour $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt$.
Starter : Pour I, faire le changement de variable $t = u^2$, puis faire une intégration par parties et pour J, poser le changement de variable $t = \tan u$.

Exercice 14

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?
2. L'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\, dt$ est-elle convergente ?

Exercice 15

Étudier l'intégrabilité de :

$$f_1 : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{\sin t} \text{ sur } I_1 = [0, \tfrac{\pi}{2}[,\ f_2 : t \mapsto \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \text{ sur } I_2 = [0, +\infty[,$$

$$f_3 : t \mapsto \frac{t}{t^3 + \sqrt{t} - 1} \text{ sur } I_3 = [1, +\infty[,\ f_4 : t \mapsto \frac{1}{\sin t} \text{ sur } I_4 =]0, 1],$$

$$f_5 : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t} \text{ sur } I_5 = [0, +\infty[,\ f_6 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(2-t)}} \text{ sur } I_6 = [1, 2[,\ f_7 : t \mapsto \frac{t \ln t}{\sqrt{1-t^2}} \text{ sur } I_7 =]0, 1[.$$

Exercice 16

On pose $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$ et $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt$.

1. Montrer que ces deux intégrales sont convergentes et que $A = B$.
   Starter : pour montrer $A = B$, on pourra poser $u = \dfrac{\pi}{2} - t$.
2. Montrer que $A + B = -\dfrac{\pi}{2} \ln 2 + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\, dt$ puis que $A = B = -\dfrac{\pi}{2} \ln 2$.
   Starter : On pourra transformer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\, dt$ en $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt$ à un coefficient près puis on transformera $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt$ par un changement de variable.

Exercice 17

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n\, dt$.

1. Montrer la convergence de I_n.
   Starter : on pourra poser $x = \dfrac{1}{t}$ et appliquer un changement de variable.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n et en déduire I_n.
   Starter : on appliquera une intégration par parties à I_{n+1} en disant que $(\ln t)^{n+1}$ est une fois $(\ln t)^{n+1}$.