Séries numériques

■ Étude de convergence de séries par calcul de leur somme

Exercice 01

Soit la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ définie pour $n \geqslant 2$.
Montrer que u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = \phi(n) - \phi(n-1)$, où ϕ est à déterminer.
En déduire la somme $\sum_{k=2}^{n} u_k$ puis la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.
Montrer enfin que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \frac{-1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Starter : on commencera par écrire $1 - \frac{1}{n^2}$ sous la forme $\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$.

Exercice 02

Soit α un réel strictement supérieur à 1 et on pose : $u_n = \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{2}{n^\alpha}$, pour tout $n \geqslant 2$.

1. Calculer $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right)$ et montrer que :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}.$$

   En déduire que la série de terme général u_n converge en calculant sa somme.
2. Déterminer un équivalent simple de $S - S_n$ en factorisant par $\frac{1}{n^\alpha}$.

■ Étude de séries alternées

Exercice 03

Étudier la convergence de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$$

puis trouver une valeur approchée de sa somme à 10^{-3} près.

Starter. Eh oui, il faut vous munir d'une calculette !

Exercice 04

Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n - \ln n}$.

Starter. Faire un développement limité ou tenter le théorème spécial des séries alternées ? Là est la question (dirait un dramaturge anglais célèbre). On penchera pour la deuxième piste. La série est clairement alternée. On tente d'appliquer alors le théorème spécial des séries alternées. Le point délicat de l'exercice est le caractère décroissant de $\left(\frac{\ln n}{n - \ln n}\right)$ (qui est clairement positive et de limite nulle).

T.S.V.P →

■ Étude de séries à termes positifs

Exercice 05

Étudier la convergence des séries ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n},\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1},\ \sum_{n\geqslant 0} \exp(-n^\alpha),\ \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right),\ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx,$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\left[n^{1/n^2}-1\right],\ \sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}},\sum_{n\geqslant 1}\left[1-e^{1/n}\right],\ \sum_{n\geqslant 0}\left[(n^3+1)^{1/3}-(n^2+1)^{1/2}\right],\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}.$$

Starter : On peut trouver des équivalents ou des majorations. Pour la cinquième série, utiliser $\sin x \leqslant x$. Pour la neuvième série, on fera un DL en $1/n$.

Exercice 06

Étudier la convergence et trouver la somme éventuelle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n3^{-n}$.

Starter : Pour le calcul de la somme, remarquer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n-1}$.

Exercice 07

Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, où $b < a$: $\arctan \dfrac{a-b}{1+ab} = \arctan a - \arctan b$.

Étudier la convergence puis trouver la somme éventuelle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$.

Starter : On cherchera a et b tels que $a-b=2$ et $1+ab=n^2$.

Exercice 08

Étudier la convergence et la somme éventuelle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-1}$.

Starter : On pourra constater que $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

Exercice 09

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \mapsto \ln t - \arctan t - n\pi$. Montrer : $\forall n, \exists!\, x_n \in \mathbb{R}, g_n(x_n) = 0$.

Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > e^{n\pi}$. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{x_n}$.

Starter : On utilise le $T.V.I$ au départ puis on remarquera que $\sum e^{-n\pi}$ est une série géométrique.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p[n]$ le nombre de chiffres de n dans son écriture en base 10.

Après avoir vérifié la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{p[n]}{n(n+1)}$, calculer sa somme.

Starter : Si $n = a_1 ... a_{p[n]}$ alors $n = a_1 10^{p[n]-1} + ... + a_{p[n]}10^0$. Les chiffres $a_1, ..., a_{p[n]}$ sont dans $[\![0,9]\!]$ avec $a_1 \neq 0$. On remarquera alors que : $10^{p[n]-1} \leqslant n < 10^{p[n]}$.

Pour le calcul de la somme, on utilisera la (classique) égalité : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour calculer par télescopage la somme partielle d'ordre $10^m - 1$, puis la limite de la suite de ces sommes partielles. En chemin, il faudra calculer $p[n] - p[n-1]$ qui vaut 0 sauf si ... ?

■ Étude de séries à termes quelconques

Exercice 11

Préciser pour quelles valeurs de x, les séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}},\ v_n = \frac{\sin(nx)}{n^2},\ w_n = x^n\ \cos(n\theta)$$

sont absolument convergentes.

Exercice 12

Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{n(2+i)^n}{2^n}$, $n \geqslant 1$.

Exercice 13

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b réels pour que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ converge.
   Indication : Il s'agit de faire un développement limité du terme général u_n quand n tend vers $+\infty$. On fait « apparaître » la quantité $\frac{1}{n}$. C'est very classique ! Pousser le DL à l'ordre 2.
2. Pour les valeurs de a et de b obtenues, calculer la somme de cette série.
   Indication : On remarquera que u_n s'écrit comme la somme de deux différences consécutives.
   Plus précisement, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right)$.
3. Trouver un équivalent simple du reste d'indice n.

Exercice 14

$a > 0$, étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{a - (-1)^n\sqrt{n}}{n - (-1)^n\sqrt{n}}$.

Starter : On pourra faire un développement limité en $1/n$.
Par ailleurs, on rappelle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n|v_n|$ est une série convergente si $|v_n|$ décroît vers 0.