

équation différentielle liée à un système linéaire du second ordre

Forme canonique de l'équation différentielle homogène(régime libre):

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{s} + \frac{2}{\tau} \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad (\text{régime libre})$$

	pulsation propre du système*	Dimension [ω_0] = 1 / T
Q	facteur de qualité	Sans dimension
m ou ξ / $Q=1/2m$ ou $1/2\xi$	coefficient d'amortissement	Sans dimension

* le système non amorti(Q infini ou m=0) se comporterait comme un oscillateur harmonique oscillant à la fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ fréquence propre du système d'équation $\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$

Equation caractéristique et ses solutions :

$$X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2$$

Discussion : signe de Δ $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) = 4\omega_0^2 (m^2 - 1)$

$\Delta > 0$ soit $|Q| < 1/2$ ($|m| > 1$) : régime aperiodique(pas d'oscillations)

$\Delta < 0$ soit $|Q| > 1/2$ ($|m| < 1$) : régime pseudo-périodique(avec oscillations)

pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ avec $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ pseudo-pulsation

Estimation de Q dans le cas d'un régime pseudo-périodique très peu amorti d'un système stable :

Q positif et $Q \gg 1/2$

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq \omega_0 \quad \text{et}$$

$$Q * T = 3\tau \quad **$$

**

$$Q * T \simeq Q * T_0 = Q \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{et}$$

$$\frac{2}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$Q * T \simeq Q * T_0 = \tau \frac{2\pi}{2} = \tau * \pi \simeq 3\tau$$

On pourra estimer 3τ avec l'enveloppe(réponse à 5%)

ici, $3\tau = 70 \text{ ms}$ $T = 12 \text{ ms}$ $Q \simeq 6$

on compte bien 6 périodes sur la durée 3τ

