

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.

Initialisation $u_0 \in]0, 1[$ et $u_1 \in]0, 1[$.

Transmission Supposons $n \geq 0$ et $u_n \in]0, 1[$ et $u_{n+1} \in]0, 1[$. Alors $u_{n+2} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n})$ et

$$[0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{u_n} < 1 \text{ et } 0 < u_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{u_{n+1}} < 1] \Rightarrow 0 < \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} < 2$$

$$\Rightarrow u_{n+2} \in]0, 1[.$$

2. Pour tout $x \in]0, 1[$, $\sqrt{x} \geq x \Leftrightarrow x \geq x^2 \Leftrightarrow x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(1 - x) \geq 0$.

Comme x et $1 - x$ sont positifs, on a bien le résultat.

3-a Supposons $u_n \leq u_{n+1}$. Alors $v_n = \min(u_n, u_{n+1}) = u_n$. De plus,

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) \geq \frac{1}{2} (u_{n+1} + u_n) \geq \frac{1}{2} (u_n + u_n) = u_n.$$

Donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2})$ qui vaut soit $u_{n+1} \geq u_n$, soit $u_{n+2} \geq u_n$ et dans tous les cas, $v_{n+1} \geq u_n = v_n$.

3-b Supposons $u_{n+1} \leq u_n$. Alors $v_n = \min(u_n, u_{n+1}) = u_{n+1}$.

De plus,

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) \geq \frac{1}{2} (u_{n+1} + u_n) \geq \frac{1}{2} (u_{n+1} + u_{n+1}) = u_{n+1}.$$

Donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) = u_{n+1} = v_n$.

3-c **Conclusion** : la suite $(v_n)_n$ est croissante car dans tous les cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geq v_n$.

4. La suite $(v_n)_n$ est bornée car appartient à $]0, 1[$.

De plus, elle est croissante donc convergente vers $l \in]0, 1[$.

5-a Supposons $u_n \leq u_{n+1}$. Alors $\sqrt{v_n} = \sqrt{u_n}$. Or,

$$\sqrt{u_n} \leq \sqrt{u_{n+1}} \Rightarrow u_{n+2} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) \geq \frac{1}{2} (2\sqrt{u_n}) = \sqrt{u_n}.$$

Et donc $\sqrt{v_n} \leq u_{n+2}$.

De même, comme $u_{n+2} \geq u_n$ et donc $\sqrt{u_{n+2}} \geq \sqrt{u_n}$, on a :

$$\sqrt{u_n} \leq \sqrt{u_{n+1}} \Rightarrow u_{n+3} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+2}} + \sqrt{u_{n+1}}) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{u_n} + \sqrt{u_n}) = \sqrt{u_n}.$$

Donc $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n} = \sqrt{u_n}$. Enfin, $v_{n+2} = \min(u_{n+3}, u_{n+2})$ qui vaut soit $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n}$ soit $u_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$.

Donc dans tous les cas, $v_{n+1} \geq \sqrt{v_n}$.

5-b Supposons $u_n \geq u_{n+1}$. Alors $\sqrt{v_n} = \sqrt{u_{n+1}}$. Or,

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) \geq \frac{1}{2} (2\sqrt{u_{n+1}}) = \sqrt{u_{n+1}}.$$

Et donc $\sqrt{v_n} \leq u_{n+2}$.

De même, comme $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ et donc $\sqrt{u_{n+2}} \geq \sqrt{u_{n+1}}$, on a :

$$u_{n+3} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+2}} + \sqrt{u_{n+1}}) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_{n+1}}) = \sqrt{u_{n+1}}.$$

Donc $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n}$. Enfin, $v_{n+2} = \min(u_{n+3}, u_{n+2}) \geq \sqrt{v_n}$.

6. Partons de pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ et comme (v_n) tend vers l , par continuité de $\sqrt{\cdot}$,

$$l \geq \sqrt{l} \Rightarrow l \geq 1.$$

Comme $l \leq 1$, $l = 1$.

7. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq 1$ et d'après le théorème des Gendarmes, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$, on a bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 02

1. On a : $f(1) = \arcsin 1 + 2 \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin 0 + 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

2. • f_1 est définie si et seulement si $2x - 1 \in [-1, 1]$ donc pour $x \in [0, 1]$. C'est le domaine de définition de f_1 .

• f_2 est définie si et seulement si $\frac{1-x}{x} \geq 0$ et $x \neq 0$.

1er cas : $x > 0$ et alors $1 - x \geq 0$ ce qui donne $x \in]0, 1]$.

2e cas : $x < 0$ et alors $1 - x \leq 0$ et donc $x \geq 1$. Alors $x \in \emptyset$.

Ainsi le domaine de définition de f_2 est $]0, 1]$.

• Le domaine de définition de f est $I = [0, 1] \cap]0, 1] =]0, 1]$.

3-a Comme $(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ avec $u(x) = 2x - 1$, on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f_1'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

De même, $(\arctan v(x))' = \frac{v'(x)}{1+v^2(x)}$ avec $v(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

Et $v'(x) = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{x}{1-x}} \times \left(\frac{1-x}{x}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x-x^2}}$. Alors :

$$\forall x \in]0, 1[, f_2'(x) = -2 \frac{1}{2x\sqrt{x-x^2}} \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = -2 \frac{1}{2x\sqrt{x-x^2}} = \frac{-1}{x\sqrt{x-x^2}}.$$

Donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ et donc f est constante sur $]0, 1[$. Par continuité, elle l'est aussi sur I et d'après 1, cette constante est $\frac{\pi}{2}$.

3-b Comme $x \in]0, 1]$, x peut s'écrire $\cos^2 \alpha$.

De plus, pour $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a bien $\cos^2 \alpha \in [0, 1]$. Alors :

$$f_1(\cos^2 \alpha) = \arcsin(2 \cos^2 \alpha - 1) = \arcsin(\cos 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(2\alpha)) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

car $2\alpha \in [0, \pi]$. Puis :

$$f_2(\cos^2 \alpha) = 2 \arctan \sqrt{\frac{1-\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \arctan \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \arctan \sqrt{\tan^2 \alpha} = 2 \arctan |\tan \alpha| = 2\alpha$$

car $\tan \alpha \geq 0$ et $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Il reste à écrire $f(x) = f_1(\cos^2 \alpha) + f_2(\cos^2 \alpha) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\alpha = \frac{\pi}{2}$.