2TSI. Devoir surveillé N°01

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Samedi 01 Octobre 2022

Les différents exercices sont indépendants, de poids inégaux et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Les calculettes sont interdites.

EXERCICE 01

On pose $u = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $v = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

1. Écrire u et v sous forme exponentielle.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^6 = u$ et $z^4 = v$.

EXERCICE 02

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation

$$(E)\ :\ \ P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ et que peut-on dire de j ?
2. Calculer $1 + j + j^2$ puis comparer j^2 et $\overline{j}$ d'une part et $-1 - j$ et $\overline{j}$ d'autre part.
3. Vérifier que $X^2 + X + 1$ est solution de (E).
4. Déterminer les polynômes constants solutions de (E).
5. Soit P une solution non nulle de (E) de degré $n \geqslant 0$. Quel est son coefficient dominant ?
   On justifiera sa réponse.
6. Soit P un polynôme non constant solution de (E) et α une racine de P.
   Montrer alors que α^{2^n} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ est une racine de P.
7. Soit α une racine de P solution de (E) telle que $|\alpha| \neq 0$ et $|\alpha| \neq 1$. Que peut-on dire de P ?
   En déduire que si P est une solution non nulle de (E), les racines de P sont soit nulle, soit de module 1.
8. On pose $\alpha = e^{i\theta}$ une racine de P solution non nulle de (E). Que peut-on dire de $(1+\alpha)^2$?
   En déduire les trois valeurs possibles des racines non nulles de P. On justifiera sa réponse.
9. **Question pour départager les exaequo**. Soit P une solution non nulle de (E) de la forme
   $$P = X^{n_1}(X+1)^{n_2}(X-j)^{n_3}(X-\overline{j})^{n_4},$$
   où n_1, n_2, n_3 et n_4 sont quatre entiers naturels éventuellements nuls. En identifiant $P(X^2)$ d'une part et $P(X)P(X-1)$ d'autre part, que peut-on dire des entiers n_1, n_2, n_3 et n_4 ?
   En déduire alors toutes les solutions de (E).

EXERCICE 03

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que :

$$f(a) = f'(a),\ f(b) = f'(b).$$

De plus, on pose $g : x \mapsto (f'(x) - f(x))\, e^x$.

1. Justifier que g soit dérivable sur $[a,b]$ et déterminer $g(a)$ et $g(b)$.
2. En calculant $g'(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

EXERCICE 04

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\},\ f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

On rappelle que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et on pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Partie A - Lieux de points

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \dfrac{1}{3}(-3 + 2i\sqrt{3})$.
   Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A, B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral (on pourra mettre $f(c)$ sous forme trigonométrique).
2. Écrire le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
   (On posera $z = x + iy$ et on trouvera une égalité utilisant x et (ou) y.)
3. Écrire le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.
   (On posera $z = x + iy$ et on trouvera une égalité utilisant x et (ou) y.)

Partie B - Étude d'une suite récurrente

1. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution, que l'on exprimera en fonction de ω.
   (b) La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
   (c) Montrer que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
2. Dans la suite, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.
   (b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?
   (c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.
3. On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -i, i\}$, et on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}.$$
   D'après la question précédente, la suite (v_n) est bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n \neq -i$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.