Correction DS N°01

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

1. • Comme $1+i\sqrt{3} = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1-i\sqrt{3} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$,

$$u = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

• Comme $1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $1+i\sqrt{3} = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$,

$$v = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}.$$

2. • Posons $z = r\,e^{i\theta}$, alors $z^6 = r^6\,e^{i6\theta} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}+i2k\pi}$. Cela entraîne :

$$r = 1 \text{ et } 6\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow r = 1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{3k\pi}{9},\ k \in [\![0,5]\!]$$

Cela donne :

$$S = \left\{ e^{i\frac{\pi}{9}},\ e^{i\frac{4\pi}{9}}, e^{i\frac{7\pi}{9}},\ e^{i\frac{10\pi}{9}}, e^{i\frac{13\pi}{9}}, e^{i\frac{16\pi}{9}} \right\}$$

• Posons $z = r\,e^{i\theta}$, alors $z^4 = r^4\,e^{i4\theta} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}+i2k\pi}$. Cela entraîne :

$$r = 2^{-\frac{1}{8}} \text{ et } 4\theta = \frac{-7\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow r = 2^{-\frac{1}{8}} \text{ et } \theta = \frac{-7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2},\ k \in [\![0,3]\!]$$

Cela donne :

$$S = \left\{ 2^{-\frac{1}{8}}e^{i\frac{-7\pi}{48}},\ 2^{-\frac{1}{8}}e^{i\frac{17\pi}{48}},\ 2^{-\frac{1}{8}}e^{i\frac{41\pi}{48}},\ 2^{-\frac{1}{8}}e^{i\frac{65\pi}{48}} \right\}$$

EXERCICE 02

1. On a : $\Delta = -3 < 0$ et les solutions sont $\dfrac{-1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On reconnait j et $\bar{j}$.

2. Donc $1 + j + \bar{j} = 1 + j + j^2 = 0$. De plus, $\bar{j} = j^2$ et $\bar{j} = -1 - j$ et $-1 - \bar{j} = j$.

3. Pour $P = X^2 + X + 1$, $P(X^2) = X^4 + X^2 + 1$ et

$$P(X)P(X-1) = (X^2+X+1)((X-1)^2 + X - 1 + 1) = (X^2+X+1)(X^2-X+1) = X^4 + X^2 + 1.$$

4. Déjà le poynôme nul vérifie (E). Puis si $P = a_0 \neq 0$, $P(X^2) = a_0$ et $P(X)P(X-1) = a_0^2$. Alors :

$$a_0^2 = a_0 \Rightarrow a_0 = 1.$$

En conclusion, seuls les polynômes constants égaux à 0 ou 1 sont solutions de (E).

5. Si P est de degré 0, alors $P = 1$. C'est réglé.
Supposons $n \geqslant 1$ et posons $P = a_nX^n + Q_n$ avec Q_n de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $a_n \neq 0$. Alors $P(X^2) = a_nX^{2n} + Q_n(X^2)$. Et $Q_n(X^2)$ est de degré au plus $2n-2$. Puis

$$P(X)P(X-1) = (a_nX^n + Q_n(X))(a_n(X-1)^n + Q_n(X-1)) = a_n^2X^{2n} + Z_n(X),$$

où Z_n est de degré au plus $2n-1$. En identifiant, $a_n = a_n^2$ et donc $a_n = 1$.

6. Supposons α une racine de P avec $\deg P \geqslant 1$. Comme $P(\alpha) = 0$, on a $P(\alpha^2) = 0$ et donc α^2 est une racine de P.
Si l'on suppose que α^{2^n} est une racine de P, alors $\left(\alpha^{2^n}\right)^2 = \alpha^{2^{n+1}}$ aussi. D'où le résultat.

7. Si α est une racine de P de module différent de 0 et de 1, comme α^{2^n} est une racine de P, pour tout n, nécessairement ce nombre de racines est fini (au plus le degré de P.) Or les modules des complexes α^{2^n} sont alors tous différents, ce qui est absurde. Dons soit $\alpha = 0$ soit α est de module 1.
Par contre si P est nul, tous les complexes sont alors racines.

8. Si l'on pose $x = 1 + \alpha$, $P(x^2) = P((1+\alpha)^2) = P(1+\alpha)P(\alpha) = 0$ donc $(1+\alpha)^2$ est encore une racine de P. Donc, $1 + \alpha = 0$ ou $|1+\alpha| = 1$. Alors soit $\alpha = 1$, soit :

$$|1+\alpha|^2 = (1+\alpha)(1+\bar{\alpha})^2 = 1 + \alpha + \bar{\alpha} + |\alpha|^2 = 1 \Rightarrow \alpha + \bar{\alpha} = -1$$

si $|\alpha|^2 = 1$. Alors $\alpha = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et c'est j ou $\bar{j}$.
En conclusion, les racines de P sont 0, -1, j et $j^2 = \bar{j}$.

9. On peut remarquer d'après la question précédente que si P une solution non nulle de (E) alors elle est de la forme $P = X^{n_1}(X+1)^{n_2}(X-j)^{n_3}(X-\bar{j})^{n_4}$, où n_1, n_2, n_3 et n_4 sont quatre entiers naturels éventuellements nuls. Il s'agit maintenant d'identifier $P(X^2)$ et $P(X)P(X-1)$. D'une part,$P(X^2)$ vaut :

$$X^{2n_1}(X^2+1)^{n_2}(X^2-j)^{n_3}(X^2-\bar{j})^{n_4}.$$

D'autre part, $P(X-1)P(X)$ vaut :

$$X^{n_1}(X+1)^{n_2}(X-j)^{n_3}(X-\bar{j})^{n_4}(X-1)^{n_1}X^{n_2}(X-1-j)^{n_3}(X-1-\bar{j})^{n_4}.$$

C'est-à-dire :

$$X^{n_1}(X+1)^{n_2}(X-j)^{n_3}(X-\bar{j})^{n_4}(X-1)^{n_1}X^{n_2}(X+\bar{j})^{n_3}(X+j)^{n_4}.$$

Ou encore :

$$X^{n_1+n_2}(X+1)^{n_2}(X-1)^{n_1}(X-j)^{n_3}(X+j)^{n_4}(X-\bar{j})^{n_4}(X+\bar{j})^{n_3}.$$

. Or, $j^2 = \bar{j}$ et $\bar{j}^2 = j$. On en déduit que :

$$(X^2-j)^{n_3} = (X^2-\bar{j}^2)^{n_3} = (X-\bar{j})^{n_3}(X+\bar{j})^{n_3} \text{ et } (X^2-\bar{j})^{n_4} = (X^2-j^2)^{n_4} = (X-j)^{n_4}(X+j)^{n_4}.$$

En identifiant, $2n_1 = n_1+n_2$, $n_2 = n_1 = 0$ et$n_3 = n_4$.
Il reste les polynômes de la forme : $P = (X^2+X+1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 03

1. g est dérivable car c'est la somme et le produit de fonctions dérivables sur $[a, b]$.
Par ailleurs, $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$ car $f(a) = f'(a)$, $f(b) = f'(b)$.
2. Alors pour tout $x \in [a, b]$, $g'(x) = (f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x))e^x = (f''(x) - f(x))e^x$.
On utilise le théorème de Rolle. Comme g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$ donc sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$g'(c) = 0 \Rightarrow (f''(c) - f(c))e^c = 0 \Rightarrow f''(c) = f(c).$$

EXERCICE 04

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.
On rappelle que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et on pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Partie A - Lieux de points

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \dfrac{1}{3}(-3 + 2i\sqrt{3})$.
Calculons $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrons que les points A, B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral.
On a rapidement : $f(a) = 0$, $f(b) = 2$, $f(c) = i\sqrt{3} + 1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.
On a immédiatement $AB = AC = BC = 2$ et l'angle entre $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ est $\pi/3$. Ainsi, (ABC) forme un triangle équilatéral.
2. Écrivons le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
Il s'agit des $z \neq -1$ tels que $|z-1| = |z+1|$. Si $D(1)$ et $E(-1)$ alors M parcourt la médiatrice du segment $[D, E]$.
On peut le retrouver par le calcul : $|z-1| = |z+1| \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$.
C'est $i\,\mathbb{R}$.

3. Écrivons le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.

On s'inspire du développement précédent :
$|z-1| = \sqrt{2}|z+1| \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 2(z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$.
Pour ceux qui connaissent, il s'agit du cercle : $(x+3)^2 + y^2 = 8$ soit le cercle de centre $(-3,\, 0)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

Partie B - Étude d'une suite récurrente

1-a. • Montrons que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution.

En effet, sinon, $z - 1 = z + 1$ et donc $-1 = 1$, ce qui est absurde.

• Montrons que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution, que l'on exprimera en fonction de ω.

On écrit : $f(z) = \omega \Leftrightarrow z - 1 = \omega(z+1) \Leftrightarrow z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$.

1-b. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?

La valeur 1 n'est pas atteinte et f n'est pas surjective. Par contre, la restriction de f de $\mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}$ est bijective. Par conséquent, f est bien injective.

1-c. Montrons que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On a : $f(z) = -1 \Leftrightarrow z = 0$ et $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$. Et -1 ne sera jamais atteint. Ainsi, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

2. Dans la suite, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

2-a. Résolvons l'équation $f(z) = z$.

C'est-à-dire $\dfrac{z-1}{z+1} = z$ ou encore $z^2 = -1$ et donc $z = \pm i$.

2-b Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?

On a $f(-i) = -i$ et $f(i) = i$ donc si $u_0 = i$, (u_n) est la suite constante de valeur i et si $u_0 = -i$, (u_n) est la suite constante de valeur $-i$.

2-c Si $u_0 \notin \{-i, i\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.
En effet, d'après la question précédente, l'image réciproque $f^{-1}(i)$ est $\{i\}$ et l'image réciproque $f^{-1}(-i)$ est $\{-i\}$.
On a : $u_0 \notin \{-i, i\} \Leftrightarrow u_1 = f(u_0) \notin \{-i, i\}$.
Par récurrence, $u_0 \notin \{-i, i\} \Leftrightarrow u_n = f(u_{n-1}) \notin \{-i, i\}$.

3-a Démontrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.

On écrit : $v_{n+1} = \dfrac{u_n - i}{u_n + i} = \dfrac{\dfrac{u_n-1}{u_n+1} - i}{\dfrac{u_n-1}{u_n+1} + i} = \dfrac{-i(u_n - i) + u_n - i}{i(u_n+i) + u_n + i}$.

Ou encore : $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 1 - iu_n - i}{u_n - 1 + iu_n + i} = \dfrac{(u_n - i)(1-i)}{(u_n+i)(1+i)} = v_n \dfrac{1-i}{1+i} = -iv_n$.
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.

3-b Montrons que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.

En effet, $v_1 = -iv_0$, $v_2 = -v_0$, $v_3 = iv_0$, $v_4 = v_0$. Par récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v_{4p+1} = -iv_0$, $v_{4p+2} = -v_0$, $v_{4p+3} = iv_0$ et $v_{4p+4} = v_0$.
Enfin, si l'on prend v_0 (qui est non nul), iv_0 est déduit de v_0 par une rotation d'angle $\pi/2$, puis $-v_0$ est issue de iv_0 par la même rotation et enfin $-iv_0$ toujours par la même rotation. Les quatre points associés sont bien les sommets d'un carré.

3-c Montrons que la suite (u_n) est également périodique de période 4.

On a : $u_n = i\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$. Et comme (v_n) prend quatre valeurs, il en est de même de (u_n) qui a la même période.