Correction DL N°02

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On a : $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Remarque : Il est inutile dans l'anneau des matrices carrées de vérifier que $QP = I_3$ aussi. Mais le faire quand même n'enlève pas des points.

2. On définit dans la suite la matrice : $B = Q \times A \times P$. Alors :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Comme B est diagonale, on sait que B^n est une matrice diagonale dont les coefficients sont les puissances $n^{\text{ème}}$ des coefficients correspondants de B. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$

Remarque : Il est inutile de faire une récurrence pour avoir B^n. Encore une fois en faire une n'est pas non plus interdit.

3-a On a rapidement :

$$A^0 = I_3, \; A^1 = A, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -64 & 0 & -64 \\ 63 & 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

3-b Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times B^n \times Q$. Notons $\mathcal{P}_n$ cette proposition.
Il est clair que $\mathcal{P}_0$ est vraie. En effet,

$$A^0 = I_3 \text{ et } P \times B^0 \times Q = PQ = I_3.$$

De même, il est clair que $\mathcal{P}_1$ est vraie. En effet,

$$A^1 = A \text{ et } P \times B \times Q = P(QAP)Q = I_3 A I_3 = A.$$

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un n entier naturel non nul. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = (P \times B^n \times Q)\, A = (P \times B^n \times Q)\,(P \times B \times Q) = P \times B^{n+1} \times Q.$$

C'est bien $\mathcal{P}_{n+1}$.

Remarque : Ici la récurrence est indispensable mais attention pour l'hérédité, on a besoin du cas $n = 1$. Donc il faut initialiser jusqu'à $n = 1$.

3-c On se lance courageusement dans le calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ -8^n & 0 & -8^n \\ (-1)^{n+1} + 8^n & 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$

3-d Méthode pour 5/2 : La matrice A^n n'est pas inversible car son déterminant est nul. En effet, A^n a une colonne nulle et il suffit de développer le déterminant selon cette colonne.

Remarque : Il y a d'autres pistes toujours pour les 5/2. On peut remarquer par exemple que $\mathsf{Det}\, B^n = 0$ et comme $A^n = PB^nQ$, alors $\mathsf{Det}\, A^n = 0$. On peut aussi montrer que la matrice C telle que $A^nC = I_3$ n'existe pas mais c'est bien plus long. On peut aussi vérifier que A n'est pas inversible car $\mathsf{Det}\, A = 0$ et donc A^n aussi. On peut aussi chercher $\operatorname{Ker} A^n$ qui n'est pas réduit au vecteur nul.

Méthode pour 3/2 : on commence par montrer que A n'est pas inversible car si on tente de résoudre $AX = B$ avec $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $B = (b_1, b_2, b_3)$,

$$\left\{\begin{array}{ccc} -x_1 & = & b_1 \\ -8x_1 - 8x_3 & = & b_2 \\ 9x_1 + 8x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

Or x_2 est indeterminable. Le système n'est pas de Cramer et A n'est pas inversible. Donc A^n aussi n'est pas inversible.
On aurait pu faire ce raisonnement sur A^n aussi directement d'ailleurs, x_2 reste indeterminable.

EXERCICE 02

1-a Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, 1[$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}$.
Alors $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}$ et on pose $P_0 = X$. Et $A(0)$ est vraie.
Puis pour $x \in I$, $f'(x)$ vaut :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)} \times \left(\frac{1}{1-x}\right)' e^{\frac{1}{1-x}},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^3}e^{\frac{1}{1-x}}.$$

C'est bien $A(1)$ en posant $P_1 = X^2 + X^3$.

1-b On suppose que $A(n)$ est vraie pour un entier n non nul donné, montrons alors $A(n+1)$ est vraie.
Partons de pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$. Alors $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ vaut :

$$P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) \times \frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^2} \times P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}.$$

C'est-à-dire :

$$\left(P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}.$$

Il suffit de poser :

$$P_{n+1} = X^2(P_n' + P_n).$$

1-c On remarque que $\deg P_0 = 1$ et $\deg P_1 = 3$. Si $\deg P_n = u_n$, alors $\deg P_n' = u_n - 1$ et $\deg P_{n+1} = \deg(X^2 P_n)$ et donc : $\deg P_{n+1} = u_{n+1} = 2 + u_n$. C'est une suite arithmétique de raison 2.
On trouve finalement :

$$\deg P_n = 1 + 2n.$$

1-d On a $P_2 = X^2(P_1' + P_1) = X^2(3X^2 + 2X + X^3 + X^2) = X^5 + 4X^4 + 2X^3$.
On a : $P_3 = X^2(P_2' + P_2) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$. (Après de terribles calculs).

1-e $P_1 = X^3 + X^2 = X^2(X+1)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
Puis :

$$P_2 = X^3(X^2 + 4X + 2) = X^3(X + 2 - \sqrt{2})(X + 2 + \sqrt{2})$$

dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

2-a f vérifie la relation : (1) $(1-x)^2 f'(x) = (2-x)f(x)$, pour tout $x \in I$.
En effet,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)} e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{2-x}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} = (2-x)f(x).$$

2-b Gottfried Leibniz dit que si u et v sont deux fonctions n fois dérivables alors uv aussi et

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Puis :

$$((2-x)f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-x)^{(k)} f^{(n-k)}(x) = \binom{n}{0}(2-x)f^{(n)}(x) - \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)$$

Et de même,

$$((1-x)^2 f'(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((1-x)^2)^{(k)} f^{(n+1-k)}(x)$$

$$= \binom{n}{0}(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - \binom{n}{1} 2(1-x) f^{(n)}(x) - \binom{n}{2} 2 f^{(n-1)}(x).$$

Mis ensemble :

$$\binom{n}{0}(2-x)f^{(n)}(x) - \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) = \binom{n}{0}(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - \binom{n}{1} 2(1-x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{2} 2 f^{(n-1)}(x).$$

Plus exactement :

$$(2-x)f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x) = (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x) f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x).$$

Ou encore :

$$\left[(2-x) + 2n(1-x)\right] f^{(n)}(x) + \left[-n - n^2 + n\right] f^{(n-1)}(x) = (1-x)^2 f^{(n+1)}(x).$$

Et finalement :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) = \left[2 + 2n - (1+2n)x\right] f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x).$$

Ainsi $a = 2 + 2n$, $b = -(1+2n)$ et $c = -n^2$.
Dans le cas $n = 1$,

$$(1-x)^2 f''(x) = (4-3x) f'(x) - f(x).$$

Comme $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$,

$$(1-x)^2 P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} = (4-3x) P_1\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} - P_0\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}.$$

On commence par enlever l'exponentielle.

$$(1-x)^2 P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x) P_1\left(\frac{1}{1-x}\right) - P_0\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Comme $P_0 = X$ et $P_1 = X^2 + X^3$, on en déduit :

$$(1-x)^2 P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x)\left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}\right] - \frac{1}{1-x}.$$

Et donc :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x)\left[\frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5}\right] - \frac{1}{(1-x)^3}.$$

On remarque que $4 - 3x = 1 + 3(1-x)$. Ce qui donne :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{3(1-x)}{(1-x)^4} + \frac{3(1-x)}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Et comme $\frac{3(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{3}{(1-x)^3}$ et $\frac{3(1-x)}{(1-x)^5} = \frac{3}{(1-x)^4}$, on en déduit :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{4}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On retrouve $P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3$.
Remarque : le matheux fou verra que :

$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X).$$