Devoir surveillé 02. TSI2

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Vendredi 21 Octobre 2022

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels. On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Étude de l'endomorphisme associé à A

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_l, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer le rang de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. Déterminer le noyau de l'endomorphisme f. f est-il injectif ? Est-il bijectif ?
4. On pose $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ et les vecteurs $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
   (b) Montrer que la famille (e'_1, e'_2) forme une base de l'espace vectoriel F.
5. (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e_1)$ en fonction des éléments de $\mathcal{B}'$.
   En déduire la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
   (c) Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Trouver son inverse. Retrouver l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ en utilisant ces matrices de passage.

Partie B Étude d'une suite de matrices

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
2. Montrer que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = 2I - A$.
3. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

On définit la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple (α_n, β_n) de réels tel que
$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$
et que ce couple vérifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} = \dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}.$$
Indication. On initialise en trouvant α_0 et β_0 puis on fait une transmission.
5. Déterminer $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$, et β_3.

6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de α_n et β_n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, puis montrer cette conjecture.
   En déduire l'expression de X_n, en fonction de n.

EXERCICE 02

On rappelle que la fonction tangente, notée tan, réalise une bijection strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque, notée arctan, est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle est de plus impaire, dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

1. (a) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
   (b) En déduire le développement limité de arctan au voisinage de 0 à l'ordre 3, puis celui de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser par quelle valeur elle peut être prolongée.

Dans la suite on continuera à noter f la fonction ainsi prolongée de sorte que f est désormais définie sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$ et la position du graphe de la fonction f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
4. Étudier les variations de la fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $p(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner le signe de $p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Démontrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = \dfrac{p(x)}{x^2(1+x^2)}$ puis prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f. On y fera apparaitre ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

EXERCICE 03

Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une légère décharge électrique et revient à son point de départ. On s'intéresse au nombre d'essais utilisés pour trouver la bonne porte. On envisage successivement trois hypothèses.

- **Hypothèse 1.** *Le rat a une mémoire parfaite. À chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les restantes.*
- **Hypothèse 2.** *Le rat a une mémoire immédiate. À chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres.*
- **Hypothèse 3.** *Le rat n'a pas de mémoire. Il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des portes.*

On note A_k l'événement : « au $k^{\text{ème}}$ essai, le rat trouve la bonne porte », l'événement B_n : « le rat utilise n essais pour trouver la bonne porte.

1. Écrire B_n en fonction des événements A_k et leurs complémentaires.
2. On suppose être dans la première hypothèse : le rat a une mémoire parfaite. Calculer $P(B_n)$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Que remarque-t-on ? Que penser de $P(B_n)$ pour $n \geqslant 5$?
   Indication. On pourra utiliser la formule des probabilités composées.
3. On suppose être dans la deuxième hypothèse : le rat a une mémoire immédiate. Calculer $P(B_1)$, $P(B_2)$ puis $P(B_n)$ pour n entier non nul.
4. On suppose être dans la troisième hypothèse : le rat n'a pas de mémoire (cerveau grillé par le courant par exemple). Calculer $P(B_1)$, $P(B_2)$ puis $P(B_n)$ pour n entier non nul.