2TSI. TD PYTHON 04

Systèmes différentiels

Méthode 0.1.— Comment résoudre de façon exacte ou numériquement un système différentiel linéaire d'ordre 1 avec Python

Nous allons traiter le cas du système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & a\,x(t)+b\,y(t) \\ y'(t) & = & c\,x(t)+d\,y(t) \end{array}\right.$ avec la condition initiale $x(t_0)=x_0$ et $y(t_0)=y_0$. Ici a,b,c et d sont bien entendu constantes.
On cherche une solution $t\mapsto(x(t),y(t))$ pour $t\in[t_0,t_n]$ de pas h.

- ***Première piste : on utilise*** *odeint* et on tape :

  import numpy as np
  import scipy.integrate as integr
  def $F(x,t)$:
  return $np.array([a*x[0]+b*x[1],c*x[0]+d*x[1]])$
  $T\ =\ np.arange(t0,tn,h)$
  $X\ =\ integr.odeint(F,np.array([x0,y0]),T)$

  X est un tableau de deux colonnes. Chaque $k^{\text{ème}}$ ligne correspond Ã $x(tk)$ et $y(tk)$.
  Ainsi, $X[:,0]$ (*resp.* $X[:,1]$) donne la fonction $t\mapsto x(t)$ (*resp.* $t\mapsto y(t)$).
  Pour afficher ces deux fonctions, on appliquera respectivement les commandes $plt.plot(T,X[:,0])$ et $plt.plot(T,X[:,1])$.
  Pour afficher $t\mapsto(x(t),y(t))$, on appliquera $plt.plot(X[:,0],X[:,1])$.
- ***Deuxième piste : on utilise la méthode d'Euler***. On généralise le TD 03.

Exercice 01 : résolution avec *odeint*

Résoudre avec *odeint* le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & -x(t)-y(t) \\ y'(t) & = & x(t)-y(t) \end{array}\right.$ sur $[0,10]$ de pas 0.01 avec $x(0)=1$ et $y(0)=-1$. On affichera ensemble $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$.

Exercice 02 : algorithme d'Euler

Considérons le système différentiel du premier ordre $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & f(x(t),y(t),t) \\ y'(t) & = & g(x(t),y(t),t) \end{array}\right.$, où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Les conditions initiales sont $x(t0)=x0$ et $y(t0)=y0$.
Ainsi en partant du cas du système linéaire de l'introduction :

$$f(x(t),y(t),t)=ax(t)+by(t) \text{ et } g(x(t),y(t),t)=cx(t)+dy(t).$$

1. Adapter la fonction $Euler\_Affich$ du TD 03 en une fonction $EulerSyst\_Affich$ qui a pour arguments f, g, $t0$, tn, n et $x0$, $y0$ et qui affiche la courbe intégrale $t\mapsto(x(t),y(t))$ pour $t\in[t0,tn]$ avec un pas $h=(tn-t0)/n$.
2. Appliquer à $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t)(1-y(t)) \\ y'(t) & = & y(t)(x(t)-1) \end{array}\right.$ avec $[t0,tn]=[0,10]$, $x(0)=2$, $y(0)=1$ et $n=500$.