2TSI. TD PYTHON 08

Simulation d'expériences aléatoires

Exercice 01 : lancer d'une piéce

Posé à l'oral CCS, filière TSI

On lance n fois une pièce équilibrée et on note F_n la fréquence de ≪ Face ≫ obtenus.

1. Écrire une procédure PYTHON qui permette le calcul de F_n en fonction de n.
2. Combien de lancers faut-il réaliser pour obtenir $0.4 \leqslant F_n \leqslant 0.6$ avec une probabilité $\geqslant 0.95$?

Exercice 02 : tirage de boules sans remise

On dispose d'une urne contenant $N \geqslant 3$ boules, dont une seule est verte et les autres rouges. On effectue des tirages sans remise dans l'urne, jusqu'à obtention de la verte. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on notera V_i : ≪ le $i^{\text{ème}}$ tirage donne la boule verte ≫.

1. Écrire une fonction $experience(N)$ qui renvoie le rang de tirage de la boule verte, N désignant le nombre initial de boules dans l'urne. Appliquer à $N = 7, N = 15$ et $N = 100$.
   Indication : on effectue un tirage au sort dans l'urne symbolisée par des numéros de 0 *à* $n-1$*, si* n *est la taille de l'urne. Si l'on tire* 0*, c'est la boule verte, sinon elle est rouge. On utilisera* $rd.randint(0, n)$ *qui donne aléatoirement un entier entre* 0 *et* $n-1$ *compris.*
2. Écrire $simulation(N)$ qui simule 10000 fois ce tirage. La fonction renverra une liste $[f_0, f_1, ..., f_{N-1}]$ telle que f_i soit la fréquence d'apparition de V_{i+1}. Appliquer pour $N = 8$. Conjecturer.
   Indication : on pourra utiliser $experience(N)$ *et la fonction count.*

Exercice 03 : Arrêts d'un ascenseur

Au rez de chaussée d'un immeuble à p étages, n personnes prennent l'ascenseur et s'arrêtent à un étage au hasard, de manière indépendante. X est la *v.a.r.* donnant le nombre d'arrêts de l'ascenseur et X_i est la *v.a.r.* valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i.(On pourra poser $q = 1 - \frac{1}{p}$.)
   Indication : on notera $Y_{i,j}$ *la v.a.r qui suit une loi de Bernoulli égale à* 1 *si le* $j^{\text{ème}}$ *passager descend au* $i^{\text{ème}}$ *étage. On écrira* $[X_i = 0]$ *comme intersection d'événements du type* $[Y_{i,k} = 0]$.
2. Donner l'expression de X en fonction de $X_1, ..., X_p$. En déduire $E(X)$.
3. Pour p variant de 3 à 20, et avec $n = 10$, vérifier informatiquement le résultat précédent pour 2000 puis 50000 répétitions de l'expérience.
   On commence par construire une fonction $Nb\_arret\_etage(n, p)$*, d'arguments* n *le nombre de personnes et* p *le nombre d'étages et qui renvoie le nombre d'arrêts de l'ascenseur, c'est-à-dire une valeur* $X(\omega)$*. Puis une fonction* $esperance(n, p, m)$ *qui renvoie la moyenne des valeurs* $X(\omega)$*, c'est-à-dire* $E(X)$ *après avoir fait* m *fois l'expérience. Et enfin, on compare avec la vraie valeur théorique de* $E(X)$ *trouvée à la question* **2)***.*
   Plus précisément, on crée $Nb\_arret\_etage(n, p)$*, en initialisant un compteur compt à* 0 *et une liste arret à* [ ]*. Une première boucle sur* n *attribue aléatoirement à chaque passager le numéro de l'étage où il s'arrête en ≪ nourissant ≫ arret (à cette occasion, on utilise rd.randint, voir la partie ≪ Methodes ≫ pour plus de renseignements) et une deuxième boucle incrémente compt chaque fois qu'un numéro d'étage figure dans arret.*
   Pour $esperance(n, p, m)$*, on initialise une liste* $L = [\,]$ *puis on crée une boucle qui permet de répeter l'expérience* m *fois et dans* L*, on rentre le nombre d'arrêts de l'ascenseur à chaque expérience. Il reste à faire la moyenne des éléments de* L*.*