2TSI. Correction TD PYTHON 15

1. La fonction f est polynomiale de variables x et y car c'est une somme finie de fonctions polynomiales en x et y. Elle est ainsi continue sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur :

$$C = [0, 10] \times [-20, 0].$$

La partie C de $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ car C est le produit cartésien de deux segments qui sont des fermés bornés de $\mathbb{R}$. D'après le cours, la fonction f admet un maximum et un minimum sur C et les atteint au moins une fois.
On tape pour commencer :

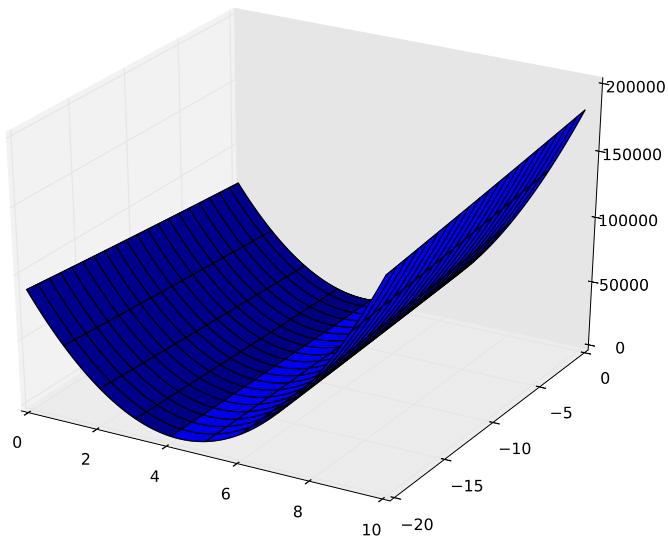
```
>>> import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
>>> from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

Puis, on rentre la fonction f :

```
>>> def f(x,y) :
        return(sum((k**4 - x*(k**3) - y)**2  for k in range(0,5)))
>>> X = np.arange(0,10,0.01); Y = np.arange(-20,0,0.01);
>>> X, Y = np.meshgrid(X,Y); Z = f(X,Y);
```

On trace alors la surface $Z = f(X, Y)$:

```
>>> ax = Axes3D(plt.figure()); ax.plot_surface(X,Y,Z); plt.show()
```



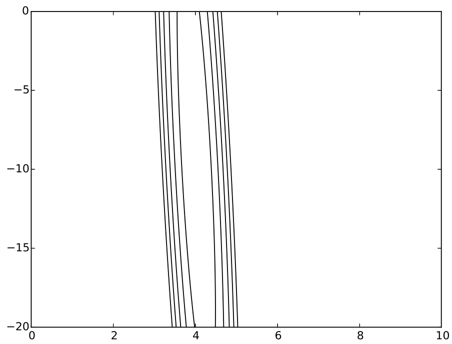
En traçant la surface, on remarque qu'il y a un minimum autour de $x = 4$. Par contre, le y correspondant est moins clair. Calculons $f(4, y)$ pour un certain nombre de valeurs de y entre -20 et 0.

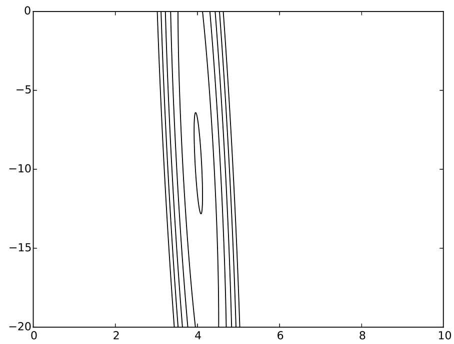
Prenons toutes les valeurs entières entre -20 et 0 compris. On tape :

$>>>$ $for\ y\ in\ range(-20, 1)$:
$print(f(4, y))$
1154 1051 958 875 802 739 686 643 610 587 574
571 578 595 622 659 706 763 830 907 994
(On a écrit les résultats en ligne pour gagner de la place.)

Finalement, on se rend compte que le minimum est pour z entre 500 et 600 (plutôt vers 570). De plus, le x de ce minimum est environ 4 et son y est entre -10 et -8.
Pour « affiner », on peut retenter des valeurs de $f(x, y)$, autour de $(4, -9)$. On peut aussi tracer des lignes de niveau. On se rend compte qu'en jouant sur la borne inférieure du *linspace*, on observe l'apparition ou la disparition de l'ellipse centrale autour de z compris entre 550 et 570. Ainsi, si l'on tape :

$>>>$ $plt.contour(X, Y, Z, np.linspace(500, 4000, 6), colors\ =\ 'k')$
$>>>$ $plt.contour(X, Y, Z, np.linspace(600, 4000, 6), colors\ =\ 'k')$





f possède un minimum autour de $(x, y) = (4, -9)$.

<u>*Remarque*</u>
Faisons un intermède *sympy* pour obtenir la valeur exacte du minimum. (Ici, on suppose avoir vu le cours sur la géométrie différentielle et notamment la notion de point critique.) On tape :
$>>>$ $from\, sympy\, import *;\ init\_printing(\,);\ x\ =\ symbols('x');$
$>>>$ $y\ =\ symbols('y');\ p\ =\ diff(f(x, y), x);\ q\ =\ diff(f(x, y), y);\ p\ ,\ q$
$(9780.x + 200.y - 37400,\ 200.x + 10.y - 708)$

Les points critiques sont solutions de (1) : $\left\{\begin{array}{rcl} 9780x + 200y & = & 37400 \\ 200x + 10y & = & 708 \end{array}\right.$.

$>>>$ $solve([p, q], [x, y])$
$\left[x : \dfrac{1162}{289},\ y : \dfrac{-13894}{1445}\right]$

Il y a un seul point critique, de valeur approchée $(4.02, -9.61)$ et un calcul rapide donne $f(4.02, -9.61) = 569.55$.

2. Montrons que $\langle\, ,\, \rangle : (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{4} P(k)Q(k)$ est bien symétrique : pour tout (P, Q) appartenant à $(\mathbb{R}_4[X])^2$,

$$\langle P\ ,\ Q\rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k)Q(k) = \sum_{k=0}^{4} Q(k)P(k) = \langle Q\ ,\ P\rangle.$$

Puis $\langle\,,\,\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. En effet, pour tout (P,Q,R) appartenant à $(\mathbb{R}_4[X])^3$ et pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\langle P+aQ\,,\,R\rangle=\sum_{k=0}^{4}(P(k)+aQ(k))R(k)=\sum_{k=0}^{4}P(k)R(k)+a\sum_{k=0}^{4}Q(k)R(k),$$

ce qui donne bien $a\langle P\,,\,R\rangle+\langle Q\,,\,R\rangle$.
Puis, pour tout $P\in\mathbb{R}_4[X]$,

$$\langle P,P\rangle=\sum_{k=0}^{4}P(k)^2\geqslant 0.$$

Et cette quantité est nulle si et seulement si P est un polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ ayant au moins 5 racines distinctes 0, 1, 2, 3 et 4. Donc si et seulement si P est nul.

Bilan : $\langle\,,\,\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

3. On tape pour commencer les modules utiles :
$>>>$ *import numpy as np* ; *from numpy.polynomial import Polynomial*
Puis, on rentre le produit scalaire de l'exercice :
$>>>$ $def\ phi(p,q)\ :\ return(sum(p(k)*q(k)\ \ for\ k\ in\ range(0,5)))$
Puis on rentre les polynômes 1 et X^3 en les baptisant $u1$ et $u2$.
$>>>$ $u1\ =\ Polynomial([1])\,;\ u2\ =\ Polynomial([0,0,0,1])$
Puis, on construit une base orthonormale $(w1,w2)$ de $F=\mathrm{Vect}\,(1,X^3)$ à partir de Gram-Schmidt.
$>>>$ $v1\ =\ u1\,;\ v2\ =\ u2\ -\ phi(u2,v1)/phi(v1,v1)*v1$
$>>>$ $w1\ =\ v1/np.sqrt(phi(v1,v1))\,;\ w2\ =\ v2/np.sqrt(phi(v2,v2))$
$>>>$ $w1.coef\ ,\ w2.coef$
$array([0.4472136])\ array([-0.37203267,0.,0.,0.01860163])$
Puis on calcule ZZ, la projection orthogonale de $Z=X^4$ sur F.
$>>>$ $Z\ =\ Polynomial([0,0,0,0,1])$
$>>>$ $ZZ\ =\ phi(Z,w1)*w1+phi(Z,w2)*w2$
$>>>$ ZZ
$Polynomial([-9.61522491,0.,0.,4.02076125])$
Puis on détermine $\|Z-ZZ\|^2$. C'est A cherché.
$>>>$ $phi(Z-ZZ,Z-ZZ)$
569.55432526
C'est bon !

On trouve pour valeur minimale de f : 569.55432526