Devoir libre 03

2TSI. Mathématiques

A rendre le jeudi 24 Novembre 2022 au plus tard

Exercice 01

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules sont indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c ($c \neq 0$) boules de la même couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n définies par $X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.

1. Donner la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.
2. Calculer $P((X_1 = i,\, X_2 = j)) = P(X_1 = i)P_{(X_1=i)}(X_2 = j)$ pour tout couple (i, j) d'entiers de $[\![0, 1]\!]$ (il y en a donc quatre).
   En déduire la loi du couple (X_1, X_2) sous forme d'un tableau. Déterminer $E(X_1X_2)$.
   En déduire la loi de X_2 puis $E(X_2)$. Reconnaître la loi de X_2. Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$.
3. On pose la variable aléatoire $Z_2 = X_1 + X_2$. Que représente Z_2 ?
   Vérifier que $Z_2(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et déterminer la loi de Z_2.
4. On généralise pour tout $p \in [\![2, n]\!]$ par la variable aléatoire $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.
   (a) Déterminer $Z_p(\Omega)$.
   (b) Justifier que pour tout $k \in Z_p(\Omega)$, $P_{(Z_p=k)}\,(X_{p+1} = 1) = \dfrac{k\,c + 1}{p\,c + 2}$.
   (c) Justifier que $((Z_p = 0),\, (Z_p = 1),\, ...,\, (Z_p = p))$ est un système complet d'événement.
   (d) Avec la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement précédent que :
   $$P\,(X_{p+1} = 1) = \frac{1}{p\,c + 2}\left(c\sum_{k=0}^{p} k\,P(Z_p = k) + \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k)\right).$$
   En déduire que $P\,(X_{p+1} = 1) = \dfrac{c\,E\,(Z_p) + 1}{p\,c + 2}$.
   (e) On va montrer que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Pour cela, on va faire une récurrence. On appelle la proposition $\mathcal{P}(p)$:
   « $X_1, X_2, ..., X_p$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ ».
   Vérifier que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
   Supposer ensuite que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ (avec $p \leqslant n - 1$). Calculer $E(Z_p)$ en fonction de p en utilisant la linéarité de l'espérance. En déduire $P\,(X_{p+1} = 1)$ et conclure.

Exercice 02

Montrer que pour tout réels a, b, c,

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c$$

en ne faisant que des opérations élémentaires sur les lignes (que l'on écrira) et en utilisant le fait qu'un déterminant triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.