Devoir libre 03

CORRECTION

Exercice 01

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules sont indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c ($c \neq 0$) boules de la même couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n définies par $X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.

1. X_1 vaut 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon. Donc X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Et comme $E(X_1)$ est son paramètre, $E(X_1) = 1/2$.

2. • Calculons $P((X_1 = 0,\, X_2 = 0)) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0)$.
Déjà $P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$. Puis $P_{(X_1=0)}(X_2 = 0)$ est la probabilité de tomber sur une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage et donc il y a dans l'urne juste avant le second tirege $c+1$ noires et 1 blanche sur un total de $c+2$ boules. Alors :

$$P((X_1 = 0,\, X_2 = 0)) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}.\frac{c+1}{c+2}.$$

• Calculons $P((X_1 = 1,\, X_2 = 0)) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 0)$.
Déjà $P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$. Puis $P_{(X_1=1)}(X_2 = 0)$ est la probabilité de tomber sur une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule blanche au premier tirage et donc il y a dans l'urne juste avant le second tirage $c+1$ blanches et 1 noire sur un total de $c+2$ boules. Alors :

$$P((X_1 = 1,\, X_2 = 0)) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}.\frac{1}{c+2}.$$

• Calculons $P((X_1 = 0,\, X_2 = 1)) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 1)$.
Déjà $P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$. Puis $P_{(X_1=0)}(X_2 = 1)$ est la probabilité de tomber sur la boule blanche au second tirage sachant que l'on a tiré une noire au premier tirage et donc il y a dans l'urne juste avant le second tirage $c+1$ noires et 1 blanche sur un total de $c+2$ boules. Alors :

$$P((X_1 = 0,\, X_2 = 1)) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{c+2}.$$

• Calculons $P((X_1 = 1,\, X_2 = 1)) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1)$.
Déjà $P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$. Puis $P_{(X_1=1)}(X_2 = 1)$ est la probabilité de tomber sur une boule blanche au second tirage sachant que l'on a tiré une boule blanche au premier tirage et donc il y a dans l'urne juste avant le second tirage $c+1$ blanches et 1 noire sur un total de $c+2$ boules. Alors :

$$P((X_1 = 1,\, X_2 = 1)) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.\frac{c+1}{c+2}.$$

Le lecteur fera le tableau En mettant en première par exemple X_2 , 0 , 1 et pour première colonne X, 0, 1.

• **Calcul de** $E(X_1X_2)$

$$E(X_1X_2) = 0 + 0 + 0 + 1 \times 1 \times P(X_1 = 1, X_2) = 1 = \frac{c+1}{2(c+2)}.$$

• **Loi de** X_2
On applique la formule des probabilités totales.

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{c+2} + \frac{1}{2}.\frac{c+1}{c+2} = \frac{1}{2}.$$

Donc forcément $P(X_2=0)=\dfrac{1}{2}$ et X_2 suit encore la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Et on a encore $E(X_2)=\dfrac{1}{2}$.

Calculons $\operatorname{Cov}(X_1,X_2)$

$$\operatorname{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=\frac{c+1}{2(c+2)}-\frac{1}{4}=\frac{c}{4(c+2)}.$$

On remarque que $\operatorname{Cov}(X_1,X_2)=0\Rightarrow c=0$ et alors la composition de l'urne n'est pas modifié après chaque tirage et il y a alors indépendance.

3. On pose la variable aléatoire $Z_2=X_1+X_2$. Déjà $Z_2(\Omega)=[\![0,2]\!]$ et par exemple $Z_2=0$ signifie que $X_1=X_2=0$ et on tiré aucune boule blanche au cours des deux tirages. Puis $Z_2=1$ est la réunion $(X_1=1,X_2=0)\cup(X_1=0,X_2=1)$, cela signifie qu'on a eu exactement une boule blanche au cours des deux tirages. Enfin, $Z_2=2$ signifie $X_1=X_2=1$ et on a 2 fois une boule blanche.

En conclusion, Z_2 est le nombre de boules blanches obtenues dans les deux tirages.

$$P(Z_2=0)=P(X_1=0,X_2=0)=\frac{c+1}{2(c+2)},$$

$$P(Z_2=1)=P(X_1=0,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=0)=\frac{1}{c+2},$$

$$P(Z_2=2)=P(X_1=1,X_2=1)=\frac{c+1}{2(c+2)}.$$

Le lecteur vérifie que

$$P(Z_2=0)+P(Z_2=1)+P(Z_2=2)=\frac{c+1}{2(c+2)}+\frac{1}{c+2}+\frac{c+1}{2(c+2)}=\frac{2c+4}{2(c+2)}=1.$$

4.a On remarque que Z_p reprèsente le nombre de boules blanches obtenus au cours des p premiers tirages. Et $Z_p(\Omega)=[\![0,p]\!]$.

4-b Prenons $k\in Z_p(\Omega)$, l'événement $(Z_p=k)$ signifie qu'au cours des p premiers tirages, on a tiré k boules blanches et donc $p-k$ boules noires. On a donc mis dans l'urne kc boules blanches et $(p-k)c$ boules noires. Et dans le tirage number $p+1$, il y a $pc+2$ boules dont $kc+1$ boules blanches. Et $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)$ est la probabilité de tirer une boule blanche au tirage number $p+1$ avec cette urne ainsi transformée.

$$\forall k\in Z_p(\Omega),\ P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)=\frac{k\,c+1}{p\,c+2}.$$

4-c $((Z_p=0),\,(Z_p=1),\,...,\,(Z_p=p))$ est un système complet d'événement.

En effet, tous ces évenements sont deux à deux disjoints et comme $Z_p(\Omega)=[\![0,p]\!]$,

On a bien $\Omega=\displaystyle\bigcup_{j=0}^{p}(Z_p=j)$.

4-d Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement précédent.

$$P(X_{p+1}=1)=\sum_{k=0}^{p}P((Z_p=k,\,X_{p+1}=1)=\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1).$$

On utilise alors **4-b**.

$$P(X_{p+1}=1)=\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)\frac{kc+1}{p\,c+2}.$$

On coupe en deux la somme du membre de droite.

$$P(X_{p+1}=1)=\frac{1}{p\,c+2}\left(c\sum_{k=0}^{p}k\,P(Z_p=k)+\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)\right).$$

Or $E\left(Z_p\right)=\sum_{k=0}^{p} k\, P(Z_p=k)$ et $\sum_{k=0}^{p} P(Z_p=k)=1$. On en déduit bien le résultat voulu.

$$P\left(X_{p+1}=1\right)=\frac{c\, E\left(Z_p\right)+1}{p\, c+2}.$$

4-e On va montrer que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour cela, on va faire une récurrence. On appelle la proposition $\mathcal{P}(p)$:

« $X_1, X_2, ..., X_p$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ ».

Initialisation. Vérifions que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies. En effet, d'après **1** et **2**, les lois de X_1 et de X_2 sont la même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Transmission. Supposons ensuite que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ (avec $p \leqslant n-1$). On demande de calculer $E(Z_p)$ alors.

$$E(Z_p)=E\left(\sum_{k=1}^{p} X_k\right)=\sum_{k=1}^{p} E(X_k)=\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2}=\frac{p}{2}.$$

En effet, comme tous les X_k pour $k \in [\![1, p]\!]$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, leurs espérances sont toutes égales à $1/2$. On utilise alors **4-d**.

$$P\left(X_{p+1}=1\right)=\frac{c\, E\left(Z_p\right)+1}{p\, c+2}=\frac{c\, \frac{p}{2}+1}{p\, c+2}=\frac{1}{2}.$$

Donc comme $X_{p+1)(\Omega)=[\![0,1]\!]}$, X_{p+1} suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. C'est bien $\mathcal{P}(p+1)$ qui est donc vraie.

Exercice 02

Montrons que pour tout réels a, b, c,

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}=1+a+b+c$$

en ne faisant que des opérations élémentaires sur les lignes (que l'on écrira) et en utilisant le fait qu'un déterminant triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

Par exemple, on fait $L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3$ et on trouve :

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}=$$
$$(1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}.$$

Puis on fait $L_2 \leftarrow L_2-bL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-cL_3$.

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}=(1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+a+b+c.$$