INTEGRATION

EXERCICES AVEC INDICATIONS

Exercice 14

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{it}}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

   Indication : calculer $|f(t)|$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(t)|\, dt$ est-elle convergente ?

2. L'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\, dt$ est-elle convergente ?

   Indication : On montrera par exemple que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ converge en faisant une I.P.P en intégrant $\cos t$ et en dérivant $1/\sqrt{t}$. On tombera sur l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\, dt$ et on prouvera qu'elle converge en majorant $\left|\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}\right|$.

Exercice 16

On pose $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$ et $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt$.

1. Montrer que ces deux intégrales sont convergentes et que $A = B$.
   Starter : On montrera que la convergence pour A. On rappelle que $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ au $v(0)$. On pourra poser $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ pour montrer que $A = B$.

2. Montrer que $A + B = -\dfrac{\pi}{2} \ln 2 + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\, dt$ puis que $A = B = -\dfrac{\pi}{2} \ln 2$.

   Starter : On pourra transformer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\, dt$ en $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt$ à un coefficient près puis on transformera $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt$ par un changement de variable.

Exercice 17

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n\, dt$.

1. Montrer la convergence de I_n.

   Starter : on pourra poser le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ puis on montrera que $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\, dx$.
   On remarquera qu'il existe $x_0 > 1$ tel que $(\ln x)^n < \sqrt{x}$ pour tout $x > x_0$. On en déduira une majoration de $\dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$ par $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$ et on pourra conclure.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n et en déduire I_n.

   Starter : Pour trouver une relation entre I_{n+1} et I_n, on appliquera une intégration par parties à I_{n+1} en disant que $(\ln t)^{n+1}$ est une fois $(\ln t)^{n+1}$. Et on écrira ensuite I_n en fonction de I_{n-1} puis I_{n-1} en fonction de I_{n-2} puis etc. jusqu'à I_1 en fonction de I_0 et on fera le produit ce qui donnera I_n en fonction de I_0.