

Devoir libre 04

2TSI. Mathématiques

A rendre le lundi 09 Janvier 2023 au plus tard

Les questions 1 et 2 sont à traiter par tous. Les questions 3 et 4 sont à lire pour tous pour comprendre l'intérêt des racines des polynômes de Tchebychev pour l'interpolation de Lagrange mais sont à développer et à traiter en bonus pour ceux qui en veulent toujours plus. Par contre, la question 5 est à faire par tous et il faudra faire du code Python et me rendre les valeurs des polynômes et les graphes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, $(x_0, \dots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ **tous distincts** et P_n l'unique polynôme de degré au plus n qui satisfait à $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose :

$$\phi : [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}.$$

On pose aussi pour tout $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ **fixé**,

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - P_n(t) - \phi(x) \prod_{i=0}^n (t - x_i).$$

- (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et s'annule aux $(n+2)$ points $x_0, \dots, x_n, x$ de $[a, b]$.
 (b) On partage $[a, b]$ avec les points $x_0, \dots, x_n, x$ qui annulent g . On crée ainsi $n+1$ sous-intervalles de réunion $[a, b]$. En appliquant le théorème de Michel Rolle (1652-1719) autant de fois que nécessaire (et en l'expliquant bien sur la copie), démontrer qu'il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que

$$g^{(n+1)}(\zeta) = 0.$$

- (c) En déduire : $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}, \exists \zeta \in [a, b], \phi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$.
 (d) En remarquant : $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$, il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $\frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$,

en déduire l'inégalité :

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **polynôme de Tchebychev de degré n** la fonction définie par

$$T_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(n \arccos x).$$

- (a) Écrire $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ seul et $\cos(3\theta)$ aussi en fonction de $\cos \theta$ seul, calculer T_0 , T_1 , T_2 et T_3 sous forme de polynômes en x .
 (b) Montrer que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
 On pose $\alpha = \arccos x$. Montrer que $(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n = \left((x + i\sqrt{1 - x^2})^n \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 En remarquant que $T_n(x) = \Re(e^{in\alpha})$ montrer par la formule du binôme de Isaac Newton (1643-1727) que T_n est un polynôme de degré exactement n .
 (c) Montrer pour tout entier n et tout réel θ :

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2 \cos((n+1)\theta) \cos \theta.$$

Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Retrouver le fait que T_n est un polynôme de degré n dont on donnera le coefficient dominant.

T.S.V.P →

- (d) Ici $n \in \mathbb{N}^*$, en remarquant que a est une racine de T_n (i.e $T_n(a) = 0$) est équivalent à $\cos(n \arccos a) = 0$, montrer que T_n admet exactement n racines simples : $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour tout k entier de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- (e) Ici $n \in \mathbb{N}^*$, expliquer pourquoi $|T_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
 Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $T'_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x)$.
 Trouver alors les valeurs qui annulent $T'_n(x)$.
 Calculer $T_n(\pm 1)$ et en remarquant que $\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1$, expliquer pourquoi ± 1 sont des extrema de T_n .
 Montrer alors que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, T_n admet exactement $n+1$ extrema globaux :

$$z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et que } T_n(z_k) = (-1)^k.$$

3. **Dans cette question**, $[a, b] = [-1, 1]$. L'objectif est de choisir les points $x_0, \dots, x_n$ utiles pour l'interpolation de Lagrange de telle manière que $\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq \sup_{x \in [-1, 1]} |Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$. Nous allons montrer que les points $x_0, \dots, x_n$ qui vérifient cette propriété sont les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1} .
 Posons alors $\frac{1}{2^n} T_{n+1} = \bar{T}_{n+1}$ (et donc $\bar{T}_{n+1}$ est normalisé), considérons $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ **normalisé** quelconque et posons : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$ et $\forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

(a) Montrer que $\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| = \frac{1}{2^n}$.

(b) Montrer $\deg(Q - \bar{T}_{n+1}) \leq n$ et $\forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $(Q - \bar{T}_{n+1})(z_k) = Q(z_k) - \frac{(-1)^k}{2^n}$.

(c) Supposons que $\frac{1}{2^n} > \sup_{x \in [-1, 1]} |Q(x)|$ et $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

Montrer alors que si k est pair, $(Q - \bar{T}_{n+1})(z_k) < 0$ et si k est impair, $(Q - \bar{T}_{n+1})(z_k) > 0$.

En déduire qu'il y a $(n+1)$ changements de signe pour $(Q - \bar{T}_{n+1})$.

Établir alors une contradiction. Conclure.

4. Montrer que si $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}v$, on a l'équivalence : $v \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in [a, b]$.

En déduire les réels $x_0, \dots, x_n$ de $([a, b])^n$ qui vérifient $\sup_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.

5. **Application numérique.** On suppose ici $f : x \mapsto \frac{1}{2+7x^2}$ et $[a, b] = [-1, 1]$.

- (a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P_9 ayant pour support $\mathbf{X} = \text{np.linspace}(-1, 1, 9)$ et $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ puis le polynôme d'interpolation de Lagrange $NewP_9$ ayant pour support les 9 racines de T_9 et leurs images par f .

Indication : on définit d'abord f par `def f(x) : return 1/(2+7*x**2)`.

Puis on s'aide de la syntaxe de l'exemple : utilisation de `interpolate.lagrange` page 2 sur 3 du TD Python 01.

En particulier, `XX = [np.cos((2*k+1)*np.pi/18) for k in range(0,9)]` donne la liste des racines de T_9 .

- (b) Faire deux dessins où apparaissent les graphes de f et de P_9 d'une part puis ceux de f et de $NewP_9$ d'autre part, sur $[-1, 1]$. On pourra différencier les deux graphes avec l'option `linestyle` affectée à l'un des deux graphes. Allez voir dans le TD 01 page 3 sur 3 la syntaxe méthode 0.3