Devoir surveillé 03

2TSI. Mathématiques

Samedi 10 décembre 2022

Les deux exercices et le problème sont indépendants. Durée 4 heures. Calculettes forbidden

Exercice 01

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$, en faisant un développement limité de e^{-t} et e^{-2t} en 0.
2. Justifier que quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$ et que $\dfrac{e^{-2t}}{t} = o(e^{-t})$.
3. Montrer alors la convergence de I.
4. On suppose $\varepsilon > 0$, montrer, en effectuant le changement de variable $x = 2t$ pour montrer la deuxième égalité :
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
5. En remarquant que $e^{-2\varepsilon} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-\varepsilon}$ pour $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, trouver $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. En déduire I.

Exercice 02

Soit n un entier non nul, on considère $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Rappeler la formule du binôme d'Isaac Newton.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, montrer : $(X+1)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}$.
3. Démontrer que si P est de degré $k \in [\![1, n]\!]$ alors $\phi(P)$ est de degré $k-1$.
4. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. **Dans cette question,** $n = 3$.
   On considère ici les polynômes $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = X^3$.
   (a) Justifier que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Calculer $\phi(P_0)(X)$, $\phi(P_1)(X)$, $\phi(P_2)(X)$ et $\phi(P_3)(X)$.
   (c) Calculer $\phi^2(P_2)(X)$ et $\phi^3(P_2)(X)$ en utilisant la question précédente.
   On rappelle que $\phi^2 = \phi\, o\, \phi$ et que $\phi^3 = \phi\, o\, \phi\, o\, \phi$.
   (d) Écrire la matrice de ϕ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) .
   En effectuant le carré et le cube de cette matrice, retrouver $\phi^2(P_2)(X)$ et $\phi^3(P_2)(X)$.
6. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x)$ et étudier sa diagonalisation.
7. **Attention à partir d'ici, n redevient un entier non nul quelconque**.
   Déterminer le noyau de ϕ.
8. Déterminer $\mathrm{Im}\,(\phi)$.
9. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\phi(Q) = P$. Montrer :
$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0).$$

T.S.V.P →

Problème

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on considère la fonction ϕ_t définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_t(x) = \dfrac{e^{-t}}{1+x^2t^2}$.
De plus, on considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \phi_t(x)\, dt.$$

On rappelle les formules de Leonhard Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Partie A

1. Montrer (par intégrations par parties détaillées) que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,
$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{\sin(kt)}{k}\, dt = \frac{1}{k^2}.$$
2. Soit $x \in]0,\pi]$.
   (a) Écrire la formule de Leonhard Euler appliquée à $\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$ puis celle appliquée à $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $e^{ix}\dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.
   (b) Supposons encore $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in]0,\pi[$. Justifier :
   $$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}.$$
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
3. Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\, dx = 0$.
4. Soit g définie sur $[0,\pi]$ par : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} - \frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   (a) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$.
   (b) Écrire le développement limité au voisinage de 0 de $\sin(x/2)$ et de $\cos(x/2)$ à l'ordre 2.
   (c) Montrer que g est continue sur $[0,\pi]$ en déterminant $\displaystyle\lim_{x\to0^+} g(x)$.
   (d) Montrer de même que g est dérivable en 0 en calculant $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$.
   (e) Montrer ensuite que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} g'(x) = g'(0)$. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
5. Montrer en utilisant les formules d'Euler appliquées à $\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$ et à $\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$, montrer :
$$2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{-x}{2}\right).$$
6. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\right) dt$.

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) + \sin\left(\frac{-t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt.$$

8. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)}{2} x\right) dx.$$

9. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Partie B

1. En considérant f comme une intégrale généralisée (de variable t dans l'intégrale) et de paramètre fixé x, montrer que cette intégrale généralisée converge pour toutes les valeurs de x réelles possibles. On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.
Étudier la parité de f.
2. On désire étudier la continuité de f.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, ϕ_t est dérivable (par rapport à x) sur $\mathbb{R}_+$ et expliciter cette dérivée.
   On admet pour la suite que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, **pour tout** $x \in \mathbb{R}_+$, $|\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t}$.
   (b) Justifier :
   $$\exists\, c \in]x, x+h[,\ \phi_t(x+h) - \phi_t(x) = h\phi_t'(c).$$
   En déduire :
   $$\forall (t,x) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \forall h \in \mathbb{R}^\star \text{ avec } x+h \geqslant 0,\ \left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right| \leqslant |h|te^{-t}.$$
   (c) Montrer que pour tout x_0 fixé dans $\mathbb{R}_+$,
   $$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leqslant \int_0^{+\infty} |\phi_t(x_0+h) - \phi_t(x_0)|\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} |h|te^{-t}\, dt.$$
   (d) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\, du$ en effectuant un changement de variable adéquat à préciser sur la copie.
   (b) En déduire pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. On étudie la nature de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan(\sqrt{x}) \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\, du \leqslant \arctan(\sqrt{x})$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\, du$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $0 \leqslant \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\, du \leqslant \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})$.
   (d) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\, du$.
   (e) Donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.
   (f) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est divergente.