Devoir surveillé 03

CORRECTION

Exercice 01

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$.

1. Calculons $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$, en faisant un développement limité de e^{-t} et e^{-2t} en 0.

On a : $e^{-t} = 1 - t + o(t)$ et $e^{-2t} = 1 - 2t + o(t)$. Il reste , au $V(0)$,

$$\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = \frac{1 - t - 1 + 2t + o(t)}{t} = 1 + o(1).$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1$.

2. Justifions que quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$.

On remarque que $\dfrac{\frac{e^{-t}}{t}}{e^{-t}} = \dfrac{e^t\, e^{-t}}{t} = \dfrac{1}{t}$ qui tend vers 0. En conclusion, $\dfrac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$.

Justifions que quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{-2t}}{t} = o(e^{-t})$

On remarque que $\dfrac{\frac{e^{-2t}}{t}}{e^{-t}} = \dfrac{e^t\, e^{-2t}}{t} = \dfrac{e^{-t}}{t}$ qui tend vers 0. En conclusion, $\dfrac{e^{-2t}}{t} = o(e^{-t})$.

3. Montrons alors la convergence de I.

• La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• En 0, comme $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t) = 1$, on en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 donc il y a convergence en 0.

• Comme quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$ et $\dfrac{e^{-2t}}{t} = o(e^{-t})$, alors : $f(t) = o(e^{-t})$. Et comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, I est bien convergente en $+\infty$.

4. On suppose $\varepsilon > 0$. On commence à appliquer la linárité de l'intégrale.

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt.$$

C'est légitime car les deux intégrales $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt$ convergent. Pourquoi d'ailleurs ?

Puis, en effectuant le changement de variable $x = 2t$ dans $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt$:

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x/2}\, dx/2 = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx.$$

On peut écrire cette dernière intégrale $\displaystyle\int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ car t et x sont des variables dites muettes.
Donc elles n'ont le droit de ne rien dire.
On écrit alors :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Or Michel de Chasles s'applique sur les intégrales généralisées.

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Et donc :

$$I = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

On a bien $I = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

5. En remarquant que $e^{-2\varepsilon} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-\varepsilon}$ pour $t \in [\varepsilon,\, 2\varepsilon]$, trouvons $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

On écrit :

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{t}\, dt \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{t}\, dt.$$

Or $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1}{t}\, dt = \ln(2\varepsilon) - \ln(\varepsilon) = \ln 2$. Donc :

$$e^{-2\varepsilon} \ln 2 \leqslant I \leqslant e^{-\varepsilon} \ln 2.$$

Un appel à la Gendarmerie fait tendre I vers $\ln 2$.

Exercice 02

1. On a pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2. On applique la formule précédente avec $a = X$, $b = 1$, $n = k$ et on obtient $(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$.
En particulier,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 2^k.$$

3. On peut récurrer.
Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathrm{H}(k)$: « si P est un polynôme de degré k, alors $\phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$ ».

<u>Initialisation :</u> $k = 1$

Soit P un polynôme de degré 1, que l'on écrit $P(X) = a_1 X + a_0$ avec $a_1 \in \mathbb{R}^*$ et $a_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\phi(P)(X) = a_1$ i.e. $\deg(\phi(P)) = 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

<u>Hérédité :</u> soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie pour tout $1 \leq i \leq k$. Montrons $\mathrm{H}(k+1)$.

Soit P un polynôme de degré $k+1$, que l'on écrit $P(X) = a_{k+1} X^{k+1} + Q(X)$ avec $a_{k+1} \in \mathbb{R}^*$ et $Q \in \mathbb{R}_k[X]$. Alors on a par linéarité de ϕ

$$\begin{aligned}\phi(P)(X) &= a_{k+1}\phi(X^k) + \phi(Q) \\ &= a_{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^k + \phi(Q)\end{aligned}$$

avec $\deg(\phi(Q)) \leqslant k-1$ par hypothèse de récurrence et $\deg\left(a_{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^k\right) = k$. Ainsi $\deg(\phi(P)) = k$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

<u>Conclusion :</u> par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Déjà pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + Q)(X) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) - \lambda P(X) + Q(X+1) - Q(X) \\ &= \lambda\phi(P)(X) - \phi(Q)(X)\end{aligned}$$

Puis, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\phi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$ ainsi

$$\deg(\phi(P)(X)) \leqslant \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X)))$$

i.e. $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5-a $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ et (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille de polynômes de degré échelonné donc forme une famille libre et est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5-b Par calcul direct, on a

$$\begin{aligned}
\phi(P_0)(X) &= 1 - 1 = 0\\
\phi(P_1)(X) &= X + 1 - X = 1\\
\phi(P_2)(X) &= (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1\\
\phi(P_3)(X) &= (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1.
\end{aligned}$$

5-c On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
\phi^2(P_2)(X) &= \phi(\phi(P_2))(X) = (2(X+1)+1) - (2X+1) = 2\\
\phi^3(P_2)(X) &= \phi(\phi^2(P_2))(X) = 0
\end{aligned}$$

5-d Rapidement, on voit que la matrice de ϕ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve dans C_3 de A^2 la valeur 2 et dans C_3 de A^3 la valeur 0.
6. Immédiatement, $\chi_A(x) = x^4$. La seule valeur propre est 0. Si A est diagonalisable, A est semblable à ma matrice $\mathrm{Diag}\,(0,0,0,0)$ soit 0. Et donc $A = P0P^{-1} = 0$. Impossible. Donc A n'est pas diagonalisable.

7. D'après la question **Q3**, si P est de degré $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\phi(P)$ est degré $k-1$ donc non nul ainsi $\ker(\phi) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_0[X]$, on a directement $\phi(P)(X) = 0$. Ainsi

$$\ker(\phi) = \mathbb{R}_0[X].$$

8. D'après la question **Q 3**, si P est de degré $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\phi(P)$ est degré $k-1$, d'où par linéarité de ϕ

$$\mathrm{Im}(\phi) = \phi(\mathbb{R}_n[X]) \supset \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

. D'après le théorème du rang, comme le noyau est de dimension 1, $\mathrm{Im}(\phi)$ est de dimension $\dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. On a donc : $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
9. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} P(i) &= \sum_{i=0}^{n} \phi(Q)(i)\\
&= \sum_{i=0}^{n} Q(i+1) - Q(i)\\
&= Q(n+1) - Q(0)
\end{aligned}$$

car on reconnaît une somme téléscopique.

Problème

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on considère la fonction ϕ_t définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi_t(x) = \frac{e^{-t}}{1 + x^2 t^2}.$$

De plus, on considère la fonction réelle f dÃ©finie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \phi_t(x)\, dt.$$

Partie A

Cette partie est le calcul de la somme de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

1) On veut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}$.
On va faire de manière classique deux intégrations par parties successives, en remarquant á chaque fois que les fonctions considérées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et la fonction $t \mapsto \cos(kt)$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(kt)}{k}\, dt + \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi,$$

par une première intégration par parties. Or :

$$\left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

Il reste :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(kt)}{k}\, dt.$$

On effectue une deuxième intégration par parties car $t \mapsto \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(kt)}{k}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$:

$$-\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(kt)}{k}\, dt = \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{-\cos(kt)}{k^2}\, dt + \left[\left(-\frac{t}{\pi} + 1\right) \frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi.$$

Or :

$$\left[\left(-\frac{t}{\pi} + 1\right) \frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi = 0 - \left(-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{k^2}.$$

Il reste :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{\cos(kt)}{k^2}\, dt + \frac{1}{k^2}.$$

Enfin :

$$\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{\cos(kt)}{k^2}\, dt = \left[-\frac{1}{\pi k^2} \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}.$$

2)a) Soit $x \in]0,\pi]$. Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ e^{ix}\dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.

Pour cela, on va utiliser les formules d'Euler :

$$\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}\right) \text{ et } \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right).$$

On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\,\frac{e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ce qui se met sous la forme simplifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}.$$

2)b) Supposons encore $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in]0,\pi[$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}},$$

en utilisant la formule qui donne la somme partielle d'une suite géométrique.
Il reste à récupérer la partie réelle de chaque membre de l'égalité précédente.

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,\left(e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\,\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}\,\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right).$$

Il reste à arranger le second membre de la dernière égalité. On utilise **2)a)** :

$$\mathrm{Re}\,\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) = \mathrm{Re}\,\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

car $\mathrm{Re}\,\left(e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$. On en déduit bien ce que l'on veut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3) Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On procède à une intégration par parties et l'on écrit :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx = -\int_0^\pi \Psi'(x)\left[\frac{-\cos(mx)}{m}\right]\,dx + \left[\Psi(x)\frac{-\cos(mx)}{m}\right]_0^\pi.$$

Cela donne :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx + \frac{1}{m}\left[-\Psi(\pi)(-1)^m + \Psi(0)\right].$$

On remarque que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\left[-\Psi(\pi)(-1)^m + \Psi(0)\right] = 0$ car $-\Psi(\pi)(-1)^m + \Psi(0)$ est borné quand m varie.
Puis :

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{m}\int_0^\pi \left|\Psi'(x)\cos(mx)\right|\,dx.$$

Or Ψ' étant continue sur $[0,\pi]$, elle est bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $x \in [0,\pi]$, $|\Psi'(x)| \leqslant M$ et donc pour tout $x \in [0,\pi]$, $|\Psi'(x)\cos(mx)| \leqslant M$.

On écrit :

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^{\pi}\Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{m}\int_0^{\pi} M\,dx = \frac{M\pi}{m},$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.
Donc : $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|\frac{1}{m}\int_0^{\pi}\Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right| = 0$ et on peut conclure.

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\pi}\Psi(x)\sin(mx)\,dx = 0.$$

4) Soit g définie sur $[0,\pi]$ par : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \in]0,\pi] \\ \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ par rapport de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, le dénominateur ne s'annulant pas.
Il reste à montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. Pour cela, on va utiliser le théorème de raccordement. Pour montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, il suffit de montrer que g est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ (ce qui est le cas) et que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ existe (et sa valeur est alors celle de la dérivée de g en 0.
Commencons donc par montrer la continuité de g en 0.
On écrit, pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Effectuons un développement limité de sin à l'ordre 1 au voisinage de 0^+ :

$$g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)} = \frac{\frac{x}{2\pi}-1}{2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)},$$

quantité qui tend vers -1 quand x tend vers 0. Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = -1$ et g est bien continue en 0 et donc sur $[0,\pi]$ (car rapport de deux fonctions continues sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas).
Montrons maintenant que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ existe.
On écrit, pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\times\frac{2}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On utilise un développement limité d'ordre 2 de sin et d'ordre 1 de cos, ce qui donne

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(2\left(\frac{x}{2}+o(x^2)\right)\right) - \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)(1+o(x))}{4\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = \frac{\frac{x^2}{\pi}-x+o(x^2)-\frac{x^2}{2\pi}+x}{x^2+o(x^2)}.$$

Il reste : $g'(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2\pi}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \dfrac{\frac{1}{2\pi}+o(1)}{1+o(1)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \dfrac{1}{2\pi}$.
Donc, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
5) Montrons :

$$2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{-x}{2}\right).$$

La méthode la plus rapide est de demander de l'aide à Leonhard (s'il le veut bien). On écrit :

$$2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)=2\left(\frac{e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}}{2i}\right)\left(\frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}}+e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{2}\right).$$

On développe et :

$$2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{(2n+1)}{2}x}+e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{(2n+1)}{2}x}\right.$$

C'est bien $\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

6. On calcule : $\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2}\right)dt=\left[\frac{t^3}{12\pi}-\frac{t^2}{4}\right]_0^\pi=-\frac{\pi^2}{6}$.

7. Déterminons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. En utilisant **1)**, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,dt,$$

puis cette égalité devient (en utilisant **2)**),

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dt=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{2\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt.$$

Il reste Ã utiliser la formule trigonométrique classique (rappelée en Q5) :

$$2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)=\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)+\sin\left(\frac{-x}{2}\right).$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)+\sin\left(\frac{-t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt.$$

8. Cela donne, en usant de la définition de la fonction g,

$$(1)\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^\pi g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt-\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2}\right)dt.$$

Ainsi (1) devient :

$$(2)\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)dx+\frac{\pi^2}{6}.$$

Puis comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut appliquer le résultat de la question **3)** :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)dx=0.$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ dans (2) et :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Partie B

1) Pour x fixé in $\mathbb{R}$, $\phi_t(x) = O(e^{-t})$ et comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, f existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut conclure :

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, f est paire.

2)a) On désire étudier la continuité de f.

- Si $t = 0$, $\Psi_t(x) = 1$ pour tout x et cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $t > 0$, ϕ_t est dérivable par rapport à x par rapport de fonctions dérivables par rapport à x et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \phi_t'(x) = \frac{-e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2}.$$

Preuve de la propriété admise : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t} \Leftrightarrow \left|\frac{-e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2}\right| \leqslant te^{-t},$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2} \leqslant te^{-t} \Leftrightarrow \frac{2xt}{(1+x^2t^2)^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2xt \leqslant (1+x^2t^2)^2.$$

Si l'on pose $u = xt$, il s'agit d'étudier le signe de $g(u) = (1+u^2)^2 - 2u$. Si $g(u) \geqslant 0$ pour $u \geqslant 0$ alors l'inégalité à montrer est vraie.
Donc : $g(u) = (1+u^2)^2 - 2u = u^4 + 2u^2 - 2u + 1$.
On a : $g'(u) = 4u^3 + 4u - 2$ et $g''(u) = 12u^2 + 4$.
Donc $g''(u)$ est toujours positif et donc $g'(u)$ est croissante. Comme $g'(0) = -2$, il existe une valeur $\alpha > 0$ et une seule qui annule g'. Ainsi, g est décroissante sur $[0, \alpha]$ avec $g(0) = 1$ et g est croissante sur $[\alpha, +\infty[$.
Il reste à dÃ©terminer le signe de $g(\alpha)$. On a :

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 = -2\alpha + 1.$$

Donc : $g(\alpha) = \alpha^4 + 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 2\alpha^3 > 0$.
La fonction g est bien à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$ et on a l'inégalité demandée :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t}.$$

2)b) On peut en déduire : $\forall (t,x) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^\star$ avec $x + h \geqslant 0$,

$$\left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right| \leqslant |h|te^{-t}.$$

En effet, l'égalité des accroissements finis (le TAF pour les intimes) peut être appliqué :

$$\exists\, c \in]x, x+h[,\ \phi_t(x+h) - \phi_t(x) = h\phi_t'(c).$$

Donc : $|\phi_t(x+h) - \phi_t(x)| \leqslant |h|te^{-t}$. C'est ce que l'on voulait.

2) c) Pour tout x_0 fixé dans $\mathbb{R}_+$,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \int_0^{+\infty} \phi_t(x_0+h)\,dt - \int_0^{+\infty} \phi_t(x_0)\,dt,$$

c'est-à-dire :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \int_0^{+\infty} \left[\phi_t(x_0+h) - \phi_t(x_0)\right]\,dt,$$

ce qui entraîne :

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leqslant \int_0^{+\infty} |\phi_t(x_0+h) - \phi_t(x_0)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} |h|te^{-t}\,dt.$$

2-d. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ a une valeur finie (que même le commun des mortels peut calculer). Donc si h tend vers 0, $|f(x_0+h)-f(x_0)|$ tend vers 0 et on a : $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Ce qui signifie que f est continue en x_0. Et donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est paire, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Reprenons pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \geqslant 0$,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \int_0^{+\infty} [\phi_t(x_0+h) - \phi_t(x_0)]\,dt.$$

On remarque que $\phi_t(x_0+h) \leqslant \phi_t(x_0)$ et donc :

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant 0.$$

On peut conclure : f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, on étend à $\mathbb{R}$:

$$f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et décroissante sur } \mathbb{R}_+.$$

4-a. Soit $x > 0$ et posons le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale définissant f :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2} \times \frac{1}{x}\,du,$$

ce qui donne bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

4-b. On remarque maintenant que $\left|e^{-\frac{u}{x}}\right| \leqslant 1$ pour tout $u > 0$ et pour tout $x > 0$. Donc :

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2x}.$$

Il reste à faire tendre x vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

5)a) Le but du jeu est la nature de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
On a les implications pour $x > 0$,

$$0 \leqslant u \leqslant \sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x} \leqslant -u \leqslant 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant -\frac{u}{x} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow e^{-\dfrac{1}{\sqrt{x}}} \leqslant e^{-\dfrac{u}{x}} \leqslant 1.$$

Il reste à intégrer :

$$e^{-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{1+u^2} \leqslant \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\dfrac{u}{x}}}{1+u^2}\,du \leqslant \int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{1+u^2}.$$

Cela donne bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan(\sqrt{x}) \leqslant \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du \leqslant \arctan(\sqrt{x}).$$

5)b) On fait tendre x vers $+\infty$ dans la double inégalité précédente. On a entre autre :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

On en déduit par le théorème des Gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

5)c) On écrit (car $e^{-\frac{u}{x}} \leqslant 1$) :

$$0 \leqslant \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du \leqslant \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} - \int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{1+u^2}.$$

Et donc, en intégrant les deux dernières intégrales :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ 0 \leqslant \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du \leqslant \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x}).$$

5)d) On écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x}\right] = 0.$$

Donc, on peut en déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

5)e) On en déduit un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$. En effet, quand x tend vers $+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) \sim \frac{\pi}{2x}.$$

5)f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est définie en 0 et f étant à valeurs positives, et comme $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2x}$, quand x tend vers $+\infty$ et comme $x \mapsto \dfrac{\pi}{2x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on peut en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ est divergente.}$$