Devoir libre 04

2TSI. Mathématiques

Correction

1-a $g : t \mapsto f(t) - P_n(t) - \phi(x) \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ par somme de produits de fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.
Puis pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$g(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) + 0 = 0$$

et on a aussi, pour finir, $g(x) = f(x) - P_n(x) - (f(x) - P_n(x)) = 0$.

1-b D'après ce qui précède, g s'annule au moins en $(n + 2)$ valeurs distinctes ce qui crée $n + 1$ sous-intervalles (dont la réunion est dans $[a, b]$).
D'après le théorème de Rolle, comme g s'annule aux extrémités de chacun de ces sous-intervalles, il existe dans l'ouvert de chacun de ces sous-intervalles un réel annulant la dérivée g'. On a ainsi trouvé $n + 1$ points distincts annulant g'. Ces points créent n nouveaux sous-intervalles dont ils sont les extrémités.
On continue à appliquer le théorème de Rolle, g' s'annule aux extrémités de chacun de ces sous-intervalles, il existe dans l'ouvert de chacun de ces sous-intervalles un réel annulant la dérivée g''. Ainsi de suite, de façon générale, pour un entier k compris entre 1 et n, on met en valeur $n+2-k$ points distincts annulant $g^{(k)}$. Ces points créent $n + 2 - (k + 1)$ nouveaux sous-intervalles dont ils sont les extrémités. On continue à appliquer le théorème de Rolle, comme $g^{(k)}$ s'annule aux extrémités de chacun de ces sous-intervalles, il existe dans l'ouvert de chacun de ces sous-intervalles un réel annulant la dérivée $g^{(k+1)}$. Et enfin pour $k = n$, on met en valeur $n + 2 - n = 2$ points distincts annulant $g^{(n)}$. Et d'après Rolle, il existe un point ζ annulant $g^{(n+1)}$ et contenu dans le sous-intervalle d'extrémités ces deux points.

1-c $g^{(n+1)}(t)$ est constitué de $f^{(n+1)}(t)$ auquel on retranche $P_n^{(n+1)}(t)$ (de valeur 0 car $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$) et auquel on retranche la dérivée $(n + 1)^{\text{ème}}$ de $\phi(x) \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ (par rapport à t). Comme cette dernière fonction est un polynôme de degré $n + 1$, seul son terme dominant nous intéresse.
Il vaut $\phi(x)t^{n+1}$ et sa dérivée $(n + 1)^{\text{ème}}$ est $(n + 1)!\phi(x)$. Alors : (Car $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$.)

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n + 1)!\phi(x) \Rightarrow f^{(n+1)}(\zeta) - (n + 1)!\phi(x) = 0.$$

Ce qui donne bien : $\phi(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!}$.

1-d En reprenant la définition de $\phi(x)$, pour tout $x \in [a, b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$, $\phi(x) = \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$.

Et en rapprochant de la question précédente,

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!}.$$

Ce qui donne toujours pour tout $x \in [a, b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$,

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Et alors ζ est quelconque.
On voit que cette dernière égalité est aussi valable pour $x = x_i$ pour tout entier i appartenant à $[\![0, n]\!]$.
On en déduit :

$$\forall x \in [a, b],\ |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

2-a Rapidement, on a : $T_0 = 1$ et $T_1 = \cos(\arccos x) = x$. Puis :

$$T_2 = \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Enfin, $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Il reste :

$$T_3 = \cos(3\arccos x) = 4\cos^3(\arccos x) - 3\cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x.$$

2-b $\sin^2(\arccos x) + \cos^2(\arccos x) = 1 \Rightarrow \sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$ car $\sin(\arccos x) \geqslant 0$.
$T_n(x)$ vaut :

$$\mathfrak{Re}\left(e^{in\alpha}\right) = \mathfrak{Re}\left(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right) = \mathfrak{Re}\left((\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n\right).$$

On pose $\alpha = \arccos x$ et on demande à Abraham de Moivre de l'aide !
Puis comme $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $(i^{2j} = (-1)^j)$:

$$T_n(x) = \mathfrak{Re}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}i^k(\sqrt{1-x^2})^k\right).$$

Ce qui donne $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}i^k\left(\sqrt{1-x^2}\right)^k$.

On arrange en posant $k = 2j$ et $T_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}x^{n-2j}(x^2-1)^j$.

Ce qui montre que T_n est bien un polynôme de degré au plus n.

Remarque : On voit que le coefficient devant x^n est $\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}$ qui est non nul donc T_n est exactement de degré n et on peut montrer en développant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ avec la formule du binôme et en faisant la demi-somme des deux égalités obtenues que le coefficient dominant est 2^{n-1}, ce que l'on retrouve à la question suivante.

2-c Cette question sert pour le training car parfois on introduit les polynômes de Tchebychev de cette façon.
- On repart de $\alpha = \arccos x$ et des deux égalités :

$\cos((n+2)\alpha) = \cos((n+1)\alpha)\cos\alpha - \sin((n+1)\alpha)\sin\alpha$.
$\cos(n\alpha) = \cos((n+1)\alpha)\cos\alpha + \sin((n+1)\alpha)\sin\alpha$.
On somme ces deux égalités.

$$\cos((n+2)\alpha) + \cos(n\alpha) = 2\cos((n+1)\alpha)\cos\alpha.$$

On revient à la définition de T_n : $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.
- On voit que si $T_n(x)$ a pour terme de plus haut degré a_nx^n,

$$a_{n+2}x^{n+2} = 2a_{n+1}x^{n+2},$$

en utilisant la dernière égalité.
Comme $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, par récurrence immédiate, $a_n = 2^{n-1}$.
Et alors $\deg T_n = n$ en est une conséquence.

2-d Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, si a est une racine de T_n alors $T_n(a) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\arccos a) = 0$.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\arccos a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arccos a = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
Or $\arccos a \in [0, \pi]$ et on doit restreindre k à $[\![0, n-1]\!]$.
Ainsi, les solutions sont les valeurs $\cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Si l'on note $x_0, ..., x_{n-1}$ ces n valeurs distinctes, comme T_n est de degré au plus n, sont exactement les racines de T_n.

2-e On a toujours $n \in \mathbb{N}^\star$.
On commence par remarquer que $|T_n(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

- Cherchons les extrema de T_n. On dérive T_n en supposant $x \in]-1,1[$.

$$T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x).$$

Pour $k=0$ et $k=n$, z_k vaut ± 1 et $T_n(\pm 1) = \pm 1$, ce sont des extrema situés en bord d'intervalle de définition.
Les valeurs (Il est clair que la dérivée T_n' change de signe autour des points où elle s'annule qui sont des extrema locaux. On montre plus loin qu'ils sont globaux) qui annulent cette dérivée sont ainsi les réels a qui annulent la quantité $\sin(n \arccos a) = 0$.
Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n \arccos a = k\pi$.
Comme $\arccos a \in]0, \pi[$ (pour que $a^2 \neq 1$), on restreint k à $[\![1, n-1]\!]$.
Ainsi, il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $a = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
Bilan : les valeurs qui annulent T_n' sont $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
- Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$T_n(z_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) = \cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Ainsi en y ajoutant ± 1, les extrema de T_n sont les points $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
- On en déduit au passage que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

3-a $\overline{T}_{n+1}$ est normalisé et $x_0, ..., x_n$ sont ses racines. D'après plus haut, $\overline{T}_{n+1}(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$ et donc :

$$\sup_{x \in [-1,1]} \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| = \sup_{x \in [-1,1]} \left|\overline{T}_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{2^n} \sup_{x \in [-1,1]} |T_{n+1}(x)|.$$

Et on peut conclure par $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

3-b • Comme Q et $\overline{T}_{n+1}$ sont normalisés et de même degré $n+1$, leurs monômes dominants sont x^{n+1} et $\deg\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right) \leqslant n$.
• Pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$,

$$\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) = Q(z_k) - \overline{T}_{n+1}(z_k) = Q(z_k) - \tfrac{1}{2^n} T_{n+1}(z_k) = Q(z_k) - \tfrac{(-1)^k}{2^n}.$$

3-c Supposons donc (On prouve ici que si l'on prend pour support d'interpolation les racines des polynômes de Tchebychev, l'écart entre f et son polynôme d'interpolation pour tout x était minimal. Ce qui va permettre d'éliminer ce que l'on appelle les effets de bords, voir plus loin) **l'inégalité** (I) $\dfrac{1}{2^n} > \sup\limits_{x \in [-1,1]} |Q(x)|$ et $k \in [\![0, n+1]\!]$.
• ***On suppose que*** k ***est pair***
Alors $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) = Q(z_k) - \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^n} = 0$.
• ***On suppose que*** k ***est impair***
Alors $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) = Q(z_k) + \dfrac{1}{2^n} > -\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = 0$.
• ***Synthèse***
On a alors pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k).\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_{k+1}) < 0$.
La fonction $Q - \overline{T}_{n+1}$ change de signe $(n+1)$ fois. Par continuité, $Q - \overline{T}_{n+1}$ a donc au moins $n+1$ racines et étant un polynôme de degré au plus n, c'est le polynôme nul. Et donc $Q = \overline{T}_{n+1}$. Ce qui est contradictoire avec (I).
• ***Conclusion***
Alors (I) **est fausse** et : $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \sup\limits_{x \in [-1,1]} |Q(x)|$. On peut alors dérouler.

$$\frac{1}{2^n} = \sup_{x \in [-1,1]} \left|\overline{T}_{n+1}\right| = \sup_{x \in [-1,1]} \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqslant \sup_{x \in [-1,1]} |Q(x)|.$$

4 On écrit : $-1 \leqslant v \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{a-b}{2} \geqslant \dfrac{a-b}{2}v \geqslant \dfrac{a-b}{2}$
$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2} \geqslant \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v \geqslant \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2} \Leftrightarrow b \geqslant x \geqslant a$. (Ne pas oublier que $a-b<0$.)
Puis, partons de **(II)** : $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |Q(x)|$, pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.
En posant $x_i = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v_i$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$x - x_i = \frac{a-b}{2}(v-v_i)$$

et donc : $\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i) = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^{n+1}\prod\limits_{i=0}^{n}(v-v_i)$.
Or, si l'on pose $Q(x) = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^{n+1} Z(v)$, comme Q est normalisé dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (de variable x), Z est normalisé dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (de variable v).
En effet, le terme dominant de Q est x^{n+1} soit $\left(\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v\right)^{n+1}$ et donc (par rapport à v) de terme dominant $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^{n+1} v^{n+1}$.
En divisant par $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^{n+1}$, **(II)** est ramené à :

$$\sup_{v\in[-1,1]} \left|\prod_{i=0}^{n}(v-v_i)\right| \leqslant \sup_{v\in[-1,1]} |Z(v)|$$

pour tout polynôme Z normalisé de degré $n+1$. Ainsi, pour optimiser le support d'interpolation $(x_0,...,x_n)$ valeurs prises dans $[a,b]$, on détermine les racines du polynôme de Tchebychev d'ordre $n+1$ que l'on nomme $v_0,...,v_n$ et on prend pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v_i$.
5-a `X = np.linspace(-1,1,9)` correspond à partager en 8 parts égales l'intervalle $[-1,1]$.
Pour l'affichage de `P9` par exemple, vous tapez `P9` puis Enter

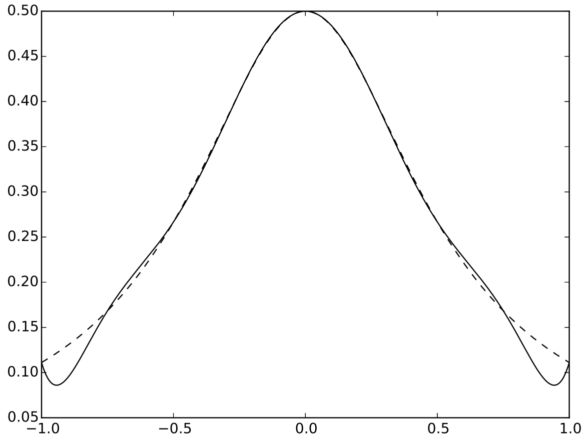
```
import scipy as sp
import numpy as np
from scipy import interpolate
def f(x) : return 1/(2+7*x**2)
X = np.linspace(-1,1,9)
P9 = sp.interpolate.lagrange(X,f(X))
XX = [np.cos((2*k+1)*np.pi/18) for k in range(0,9)]
Y =[f(np.cos((2*k+1)*np.pi/18)) for k in range(0,9)]
NewP9 = sp.interpolate.lagrange(XX,Y)
```

```
P9
 poly1d([ 2.45776378e+00,  4.52415883e-15, -5.31052532e+00, -3.33066907e-16,
         4.13826761e+00, -1.11854970e-14, -1.67439496e+00, -6.95840954e-16,
         5.00000000e-01])
NewP9
 poly1d([ 1.36618760e+00, -1.99840144e-15, -3.46426142e+00,  1.05471187e-14,
         3.29523056e+00,  7.27196081e-15, -1.58189488e+00,  4.85722573e-16,
         5.00000000e-01])
```

5-b

```
import matplotlib.pyplot as plt
XXX = np.linspace(-1,1,500)
plt.plot(XXX,f(XXX),linestyle="--");
plt.plot(XXX,P9(XXX),color='0');
plt.show()
```

Voici le tracé de f (en pointillé) et celui de $P9$. On remarquera l'effet de bord.




```
import matplotlib.pyplot as plt
XXX = np.linspace(-1,1,500)
plt.plot(XXX,f(XXX),linestyle="--");
plt.plot(XXX,NewP9(XXX),color='0');
plt.show()
```

Encore le tracé de f (en pointillé) et celui de $NewP9$. On remarquera que l'effet de bord a disparu.