Devoir surveillé 04

2TSI. Mathématiques

Vendredi 03 février 2023

L'exercice et le problème sont indépendants. Durée 4 heures. Pas de calculatrices

Exercice 01

On définit la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et les matrices colonnes de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Q 1. Calculer A^2. En déduire les valeurs propres possibles de A sans calculer le polynôme caractéristique.

Q 2. À partir du polynôme caractéristique de A, déterminer les valeurs propres et trouver des bases des sous-espaces propres de A. On pourra les écrire en utilisant U, U_1 et U_2.

Q 3. Montrer que les deux sous-espaces propres de A sont orthogonaux.
Pourriez vous préciser A géométriquement ?

Q 4. Déterminer une base orthonormale de chacun des sous-espaces propres de A. (Pour l'une des deux bases, on appliquera le procédé de Gram-Schmidt.)
Écrire alors une matrice de passage P de la base canonique à la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ réunion des deux bases orthonormales des deux sous-espaces propres. Écrire aussi une relation (sans calculs) entre A, P et une certaine matrice diagonale D à écrire.

Q 5. On définit $P_U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ par : $P_U = \dfrac{1}{\|U\|^2} UU^T$.

(a) Montrer (en détaillant bien les calculs sur sa copie) que $P_U = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que P_U est une matrice de projection.

(b) Déterminer $\mathrm{Im}\,(P_U)$ et $\mathrm{Ker}\,(P_U)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(P_V) = \mathrm{Vect}\,(U)$ et que $\mathrm{Ker}\,(P_U) = \mathrm{Vect}\,(U)^{\perp}$.
En déduire que P_U est une matrice de projection orthogonale.

Q 6. On définit $Q_U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ par : $Q_U = I_3 - \dfrac{2}{\|U\|^2} UU^T$. Déterminer la matrice Q_U comme ce qui a été fait à la question **5-a**. Que remarque t-on ?

Problème

Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathbb{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathbb{D}_\alpha$: $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

Objectifs
Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.
Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.
L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.
Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0,1[$.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

Q 7. Rappeler la règle de Hadamard pour les séries entières. Démontrer que le rayon de convergence commun aux séries entières définissant les fonctions f_α est 1.

Q 8. On pose $\mathcal{D}_\alpha$ le domaine de définition de la fonction f_α. On remarque que $]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1,1]$. La somme de la série $f_\alpha(x)$ existe-t-elle pour les bords $x=-1$ et (ou) $x=1$ dans les cas :

(a) $\alpha \in]-\infty, 0]$.

(b) $\alpha \in]0,1]$.

(c) $\alpha \in]1,+\infty[$.

Q 9. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.
On distinguera le cas où $x > 0$ et le cas où $x < 0$ et on appliquera alors le critère spécial des séries alternées.

Q 10. Expliciter sur leurs domaines de définitions respectifs les sommes :

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n,\ f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \text{ et } f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n.$$

Indication : pour $f_1(x)$ et $f_{-1}(x)$, on pourra intégrer ou dériver la somme qui donne $f_0(x)$.

Q 11. Soit $\alpha \leqslant 1$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $\dfrac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{x^n}{n}$.

(b) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, $f_\alpha(x) \geqslant f_1(x)$.

(c) Prouver que $\lim\limits_{x \to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

Partie II - Un logarithme complexe

Q 12. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-z)^n}{n}$.

Q 13. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R,R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^\star$ **fixé tel que** $|z_0| < R$**.** On considère la série entière de la variable réelle t suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.
On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q 14. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.
(On écrira ce rayon de convergence en fonction de $|z_0|$.)

Q 15. Justifier que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Justifier aussi que pour tout $t \in [0,1]$,

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1}.$$

En déduire alors l'expression de $g'(t)$ en faisant comme à la question **Q10**.

Q 16. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$: $h'(t) = \dfrac{z_0}{1+tz_0} h(t)$.

Q 17. Résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{z_0}{1+tz_0} y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$. En déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Dans toute cette partie, **on suppose que** $\alpha \in]0,1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$.

Q 18. On suppose **dans cette question seulement** $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$ fixé, l'intégrale $I(x)$ est convergente. *Indication : on pourra mettre* $\dfrac{x^t}{\sqrt{t}}$ *sous forme d'une exponentielle.*

On suppose dans la suite que $I(x)$ converge pour tout $\alpha \in]0,1[$.

Q 19. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$.

(a) Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ et $\Gamma(3)$.

(b) Pour tout $x \in]0,1[$, en posant le changement de variable $u = -t\ln x$ dans $I(x)$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

Q 20. Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. *Indication : on prouvera d'abord que* $t \mapsto x^t$ *et* $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ *sont décroissantes positives (et on le justifiera).*

Q 21. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \dfrac{x^t}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{x^n}{n^\alpha}$.

En déduire : $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha}$ et enfin, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt.$$

Q 22. Dans cette question, on veut déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

L'idée est de comparer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ quand x tend vers 1.

(a) Justifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt = -\int_0^{1} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt + I(x)$.

On admet que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ a pour limite finie $\dfrac{-1}{1-\alpha}$ quand x tend vers 1.

(b) Quelle est la limite de $I(x)$ quand x tend vers 1^- ?

(c) Montrer alors que si x tend vers 1^-, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \sim I(x)$. Conclure.