Devoir surveillé 04

2TSI. Mathématiques

Correction

Q 1. On pose : $A = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Calculons A^2.

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Alors $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A.
Si X vecteur propre associé'à λ, $AX = \lambda X$ et donc $A^2 X = \lambda^2 X = X$ et donc $\lambda^2 = 1$. Les valeurs propres possibles de A sont ± 1.

Q 2. Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Remarque : Pour montrer que -1 et 1 sont les seules valeurs propres, le plus efficace est de dire que A est une matrice de symétrie vectorielle et ses valeurs propres sont prises dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ et comme A est symétrique réelle (si vous êtes 5/2), elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si 1 (respectivement -1) est la seule valeur propre alors A est semblable à I_3 (respectivement à $-I_3$) donc $A = I_3$ (respectivement $A = -I_3$) ce qui est absurde. Donc -1 et 1 sont les deux valeurs propres de A. Enfin la trace de A est 1, et donc 1 est nécessairement double et -1 est simple car $1 = 1 + 1 - 1$.

Le polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(t) = \mathsf{Det}\,(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t - 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & t - 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & t - 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 3t-1 & 2 & -2 \\ 2 & 3t-1 & -2 \\ -2 & -2 & 3t-1 \end{vmatrix}.$$

On effectue successivement $C_3 \leftarrow C_2 + C_3$ puis on met $3(t-1)$ en facteur dans C_3 puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.

$$\chi_A(t) = \frac{3(t-1)}{27}\begin{vmatrix} 3t-1 & 2 & 0 \\ 2 & 3t-1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3(t-1)}{27}\begin{vmatrix} 3t-1 & 2 & 0 \\ 4 & 3t+1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe alors selon la colonne C_3.

$$\chi_A(t) = \frac{3(t-1)}{27}\begin{vmatrix} 3t-1 & 2 \\ 4 & 3t+1 \end{vmatrix} = \frac{3(t-1)}{27}(9t^2 - 9) = (t-1)^2(t+1).$$

Ainsi 1 est valeur propre double et -1 est valeur propre simple.
Puis trouvons une équation du sous-espace propre associé à 1.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + 2z & = & 3x \\ -2x + y + 2z & = & 3y \\ 2x + 2y + z & = & 3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x - 2y + 2z & = & 0 \\ -2x - 2y + 2z & = & 0 \\ 2x + 2y - 2z & = & 0 \end{array}\right. .$$

On obtient le plan $x + y - z = 0$. Puis $(x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Et $E_1(A)$ est de dimension 2.
Par ailleurs, $U_1 \in E_1(A)$ et $U_2 \in E_1(A)$ et (U_1, U_2) est libre donc (U_1, U_2) est une base de $E_1(A)$.
Pour la valeur propre -1, on peut faire le même process.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + 2z & = & -3x \\ -2x + y + 2z & = & -3y \\ 2x + 2y + z & = & -3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 0 \\ -x + 2y + z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 0 \end{array}\right. .$$

On trouve la droite vectorielle de base U.

Q 3. Les sous-espaces propres de A sont orthogonaux. En effet, si l'on a calculé patiemment des équations de $E_1(A)$ et de $E_{-1}(A)$, on voit que $(1, 1, -1)$ est orthogonal au plan d'équation $x + y - z = 0$ ou sinon, on utilise encore le théorème spectral qui l'affirme (si vous etes 5/2) ou alors on remarque que $UU_1^T = UU_2^T = 0$.
Géométriquement, A est la symétrie orthogonale par rapport à $E_1(A)$.

Q 4. Une base orthonormale de $E_{-1}(A)$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Une base de $E_1(A)$ est par exemple $\left(U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Les deux vecteurs de cette base ne sont pas orthogonaux. On peut appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale puis orthonormale de $E_1(A)$.
On pose $V_1 = U_1$ et $V_2 = U_2 + aV_1$ et on détermine a tel que $V_1^T V_2 = 0$.

$$V_1^T V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

On trouve $V_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Une base orthonormale de $E_1(A)$ est donc $\left(W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, W_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. On passe à P.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

On a alors : $P^T AP = D$.

Q 5-a Si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$P_U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis $P_U^2 = P_U$ et donc P_U est une matrice de projection.

Q 5-b Alors $\mathrm{Im}(P_U)$ est l'ensemble des matrices X telles que $P_U X = X$.

$$\begin{cases} x + y - z & = & 3x \\ x + y - z & = 3y & \\ -x - y + z & = & 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - z & = & 0 \\ x - 2y - z & = 0 & \\ -x - y - 2z & = & 0 \end{cases}$$

Comme on trouve $(-z, -z, z)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(P_U) = \mathrm{Vect}(U)$.

De même $\mathrm{Ker}(P_U)$ est l'ensemble des matrices X telles que $P_U X = 0$.

$$\begin{cases} x + y - z & = & 0 \\ x + y - z & = 0 & \\ -x - y + z & = & 0 \end{cases}$$

C'est un plan, le plan orthogonal à $\mathrm{Vect}(U)$. Ainsi P_U est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(U)$.

Q 6 Alors : $Q_U = \mathrm{I}_3 - 2\dfrac{1}{\|U\|^2}UU^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A.$

Problème 1
Étude d'une famille de séries entières

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

Q7. Déterminons le rayon de convergence R commun aux séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ définissant les fonctions f_α. On peut appliquer la règle de Hadamard en posant $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}\right| = \left|\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\right|.$$

Pour tout α réel, cette quantité tend vers 1 (et vaut 1 pour $\alpha = 0$). En conclusion le rayon de convergence de cette série entière est 1.

Q8. Déterminons, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α.

Remarquons dèjà que $]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha$. Puis posons $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ et éliminons les x tels que $|u_n(x)|$ ne tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on est alors en situation de série grossièrement divergente. On remarque que $\left|\dfrac{x^n}{n^\alpha}\right|$ tend vers $+\infty$ pour $|x| > 1$. On peut « affiner » D_α. »

$$]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1,1].$$

Il reste à étudier les cas où $x = \pm 1$. C'est maintenant que l'on va « jouer sur la valeur de α.

• *Supposons que* $\alpha \in]-\infty, 0]$

Pour $x = \pm 1$, la série $\sum \left|\dfrac{x}{n^\alpha}\right|$ est grossièrement divergente. Donc $\mathcal{D}_\alpha =]-1,1[$.

• *Supposons que* $\alpha \in]0,1]$

Pour $x = 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente et la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées. Donc $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1[$.

• *Supposons que* $\alpha \in]1,+\infty[$

Alors pour $x = \pm 1$, la série de Riemann $\sum \left|\dfrac{x}{n^\alpha}\right|$ est convergente et $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1]$.

Q 9. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminons, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

• Pour $x \geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est à termes positifs et sa somme (qui est finie) est positive ou nulle.

• Pour $x \leqslant 0$, la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n^\alpha} = \dfrac{(-1)^n(-x^n}{n^\alpha}$ est alternée (convergente) et d'après le critère spécial des séries alternées, sa somme a le signe de son premier terme $u_1 = x \leqslant 0$ et est donc négative ou nulle.

Q9. • *Explicitons* f_0. Pour $x \in]-1,1[$, $f_0(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1.$

• *Explicitons* f_{-1}. Pour $x \in]-1,1[$, $f_{-1}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$. Or, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$. Dérivons sur $]-1,1[$ comme le cours nous le permet membre à membre.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

• *Explicitons* f_1. Pour $x \in]-1,1[$, $f_1(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Partons de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ en intégrant maintenant terme à terme sur $]-1,1[$ comme le cours nous le permet.

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Q11. Soit $\alpha \leqslant 1$. Prouvons que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. L'énoncé écrit qu'on pourra comparer f_α à f_1.
On remarque déjà que $1 \notin \mathcal{D}_\alpha$ pour $\alpha \leqslant 1$. Le résultat attendu n'est donc pas surprenant.

$$\forall x \in [0,1[,\ \frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \frac{x^n}{n} \Rightarrow \forall x \in [0,1[\ f_\alpha(x) \geqslant f_1(x) = -\ln(1-x).$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (-\ln(1-x)) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

Partie II - Un logarithme complexe

Q 12 Le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\ln(1+x)$ est $x \mapsto -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n}$.

Q 13. Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

• Donnons le rayon de convergence R de la série entière définissant S. On applique Hadamard en posant $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\right|.$$

Cette quantité tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On peut conclure. Le rayon de convergence est $R = 1$.

Pour tout x réel élément de $]-1,1[$, déterminons la valeur de $\exp(S(x))$.
Il suffit d'utiliser une question précédente.

$$\forall x \in]-1,\ 1[,\ \ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} = S(x) \Rightarrow \exp(S(x)) = \exp(\ln(1+x)) = 1+x.$$

Q14. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable réelle t suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme. Déterminons le rayon de convergence de la série entière définissant g. On peut reprendre la règle de d'Alembert (ou Hadamard directement) ou encore remarquer que si la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$ et donc converge si et seulement si $|tz_0| < 1$, c'est-à-dire $|t| < 1/|z_0|$ pour $z_0 \neq 0$ et $0 < 1$ donc vrai sans condition sur t pour $z_0 = 0$.
En conclusion le rayon R_g de g est : $\begin{cases} 1/|z_0| & \text{si} \quad z_0 \neq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad z_0 = 0 \end{cases}$.

Q 15. On veut prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Pour commencer comme $|z_0| < 1$, $R_g = +\infty$ ou $R_g = 1/|z_0| > 1$. Donc $[0,1] \subset]-R_g, R_g[$. Et d'après le cours, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_g, R_g[$ donc sur $[0,1]$.

• Déterminons, pour tout $t \in [0,1]$ l'expression de $g'(t)$. On utilise la formule de dérivation d'une série entière du cours.

$$\forall t \in [0,1],\ g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z_0^n t^{n-1} = z_0\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(z_0t)^{n-1} = z_0\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z_0t)^n = \frac{z_0}{1+tz_0}.$$

Q 16. On pose $h = \exp\circ g$. Par composition, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ donc est dérivable sur $[0,1]$. Par ailleurs, pour tout $t \in [0,1]$, $h'(t) = g'(t)h(t)$. Il reste à utiliser la question précédente **Q 15**.

$$\forall t \in [0,1],\ h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}h(t).$$

Q 17. • Résolvons l'équation différentielle de la question précédente : $(E_h)\ h'(t) - \dfrac{z_0}{1+tz_0}h(t) = 0$.
Par ailleurs, $h(0) = e^{g(0)} = e^0 = 1$. D'après le théorème de Cauchy-linéaire, la solution est unique. On sait que l'ensemble des solutions de (E_h) est la droite vectorielle de base $t \mapsto \exp\left(\displaystyle\int \frac{z_0}{1+tz_0}\,dt\right)$. Or, $\displaystyle\int \frac{z_0}{1+tz_0}\,dt = \ln(1+tz_0)$ à une constante près. Et donc une base de (E_h) est $t \mapsto \exp(\ln(1+tz_0)) = 1+tz_0$. Donc toutes les solutions de (E_h) sont les fonctions $h : t \mapsto K(1+tz_0)$. Comme $h(0) = 1$, $h(0) = K = 1$ et donc $t \mapsto 1+tz_0$ est l'unique solution.
Enfin, $\exp(S(z_0)) = \exp(g(1)) = h(1) = z_0+1$.

Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Q 18. On suppose que $\alpha \in]0,1[$. Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$.
Montrons que $I(x)$ existe pour tout $x \in]0,1[$.
Pour commencer, $\phi : t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha} = \dfrac{e^{t\ln x}}{t^\alpha}$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
Un conseil : ne pas oublier d'écrire que ϕ est continue. Beaucoup de candidats ont oublié de le mentionner le jour du concours et se sont focalisés sur l'étude de la convergence en 0 et en $+\infty$.
Convergence en 0 : la fonction $\phi : t \mapsto \dfrac{e^{t\ln x}}{t^\alpha}$ est à valeurs positives. Au voisinage de $t = 0^+$, $\phi(t) \sim \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $\alpha \in]0,1[$.
Convergence en $+\infty$: supposons $t > 1$ alors $1/t^\alpha < 1$ et donc pour tout $t \in]1,+\infty[$, $0 \leqslant \phi(t) < e^{t\ln x}$.
Comme $\ln x < 0$ car x est fixé dans $]0,1[$, $t \mapsto e^{t\ln x}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ et il en est de même de ϕ.

Q 19. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$.

Q 19-a On a $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$ et $\Gamma(3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt = 2$.

Q 19-b Pour tout $x \in]0,1[$, on veut déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

$$I(x) = \int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{t\ln x}}{t^\alpha}\,dt.$$

On veut trouver une relation entre $I(x)$ et $\Gamma(1-\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$. L'idée est donc d'effectuer le changement de variable $u = -t\ln x$, qui est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ dans $I(x)$. Les bornes sont donc les mêmes.

$$du = -\ln x\,dt \Rightarrow I(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{-\ln x}\times\frac{(-\ln x)^\alpha}{u^\alpha}\,du = (-\ln x)^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u^\alpha}\,du.$$

On a donc la relation : $I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$.

Q 20. Prouvons que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Inutile de dériver ! La fonction $t \mapsto x^t = e^{t \ln x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (car $\ln x < 0$) et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ aussi (car sa dérivée est strictement négative) donc leur produit aussi.

Q 21. Montrons, pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$.

On écrit pour tout entier n non nul et pour tout $t \in [n, n+1]$, en utilisant la décroissance de $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$ donc sur $[n, n+1]$:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{x^t}{t^\alpha} \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

On intégre ensuite sur $[n, n+1]$.

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} = \int_n^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x^n}{n^\alpha}\,dt = \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Sommons la première inégalité pour n variant de 0 à $+\infty$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \Rightarrow f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt.$$

Sommons la deuxième inégalité pour n variant de 1 à $+\infty$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leqslant f_\alpha(x).$$

Q 22. Trouvons un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

L'idée est de comparer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ quand x tend vers 1.

$$(1) \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt = -\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt = -\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt + I(x).$$

On admet que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ a une limite finie quand x tend vers 1.

$$\lim_{x \to 1^-} \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt = \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Par ailleurs, $I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$, quantité qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1^-. Ainsi si dans l'égalité (1), on fait tendre x vers 1, $I(x)$ tend vers $+\infty$ et $-\displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ tend vers $\dfrac{-1}{1-\alpha}$.

$$\text{Quand } x \text{ tend vers } 1^-, \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \sim I(x).$$

En utilisant la double inégalité de **Q 23**, on peut en conclure que $f_\alpha(x) \sim (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$ quand x tend vers 1^-.