TSI2. Concours Blanc 2023

Épreuve de Mathématiques

Duré 4 heures. Les calculatrices sont interdites

La rigueur du raisonnement et la clarté seront prises en compte dans la notation.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Instructions propre à cette épreuve : elle possède cinq exercices indépendants. Les exercices 02, 03, 05 sont obligatoires et le candidat traitera au choix l'exercice 01 ou l'exercice 04. Il mettra en début de copie son choix : exercice 01 ou exercice 04. S'il traite les deux sur sa copie, seul le moins réussi des deux sera comptabilisé.

Exercice 01

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

Q1. Déterminer les points critiques de f.

Q2. Expliciter des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) < 0$.
Expliciter de même des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) > 0$.
La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = f(1+u, 1+v) - f(1,1)$.

Q3. Calculer pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v)$ puis, pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et montrer

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right).$$

Q4. Prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right)$.
Que peut-on en conclure ?

Q5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Exercice 02

Q6. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on ait :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$

On en déduit alors pour les deux valeurs de a et de b trouvées que :

$$\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n(n+1)(n+2)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Q7. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $u_n = \dfrac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\alpha$, où α est un réel à déterminer dans la question **Q7-c**.

a. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge pour toute valeur de α.

b. Écrire pour tout N entier non nul, $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n$ en fonction de N et de α (sans le signe $\sum$) en utilisant la décomposition faite à **Q6**.

c. Calculer alors $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n$ en fonction de α puis trouver α tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.
On prendra cette valeur de α dans la suite.

On en déduit alors qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \mathrm{P}(X=n)=\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\alpha,$$

où α est le réel trouvé précédemment.
Celui qui n'a pas trouvé α pourra continuer en laissant α sans valeur.

Q8. **Espérance de X**. On veut déterminer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X qui est par définition la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathrm{P}(X=n)$.

a. Montrer la convergence de cette série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathrm{P}(X=n)$.

b. En remarquant que $\dfrac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, écrire pour tout $N\in\mathbb{N}^\star$, $\sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(X=n)$ en fonction de N et de α (sans le signe $\sum$).

c. En déduire $\mathrm{E}(X)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(X=n)$.

Exercice 03

Soient n un entier naturel non nul et $E_n=\mathbb{R}_n[X]$.

Q9. Soient q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\sum_{k=0}^{r} q^k$ en séparant le cas $q=1$ du cas $q\neq 1$.

Q10. Soit p un entier naturel non nul. Déduire de la formule trouvée à **Q9** dans $\mathbb{R}[X]$ que le quotient de la division euclidienne de X^p-1 par $X-1$ est $\sum_{k=0}^{p-1} X^k$ et que son reste est nul (on écrira une certaine égalité polynomiale).

Q11. Soit $P\in E_n$.
Montrer que l'application $P_0 : x\mapsto \int_1^x P(t)\,dt$ est une fonction polynômiale de racine 1.
Justifier l'existence de $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P_0=(X-1)Q$ puis montrer que $Q\in E_n$ (c'est-à-dire que $\deg Q\leqslant n$) et que : $\forall x\neq 1,\quad Q(x)=\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$.
Pourquoi Q est unique pour un P donné ?

On définit ainsi une application $f : P\mapsto Q$.

Q12. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.

Q13. On veut montrer que f est un automorphisme de E_n en déterminant, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
Pour cela, on va faire une analyse-synthèse.

a. On suppose vérifiée l'équation $f(Q)=P$, d'inconnue $P\in E_n$, où Q est fixé dans E_n.
Montrer alors que : $\forall x\neq 1$, $P(x)=Q(x)+(x-1)Q'(x)$. Vérifier que $P\in E_n$.

b. Montrer réciproquement que $P=Q+(X-1)Q'$ convient, c'est-à-dire que l'on a l'égalité $f(Q+(X-1)Q')=Q$. Conclure.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les matrices (triangulaires supérieures) de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/(n+1) \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n est $\left(1, X, X^2, ..., X^n\right)$.

Q14. Calculer $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ puis $f(X^k)$ pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$.
En déduire la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n. Comparer avec A.

Q15. De même, calculer $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(X)$, $f^{-1}(X^2)$ puis $f^{-1}(X^k)$ pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$.
En déduire la matrice de f^{-1} dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n. Comparer avec B.

Q16. Déterminer les spectres des matrices A et B, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A et de B.

Q17. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

Q18. Soit $P \in E_n$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer l'équivalence :

$$P \in \ker\left(f - \frac{1}{k+1}\mathrm{Id}_{E_n}\right) \Longleftrightarrow P \in \ker\left(f^{-1} - (k+1)\mathrm{Id}_{E_n}\right).$$

En déduire que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Exercice 04

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0. \qquad (**)$$

On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence R non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que : $g(0) = a_0 = 1$.

Q19. Justifier que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Q20. Prouver que $a_1 = 0$ et démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)^2 a_{n+1} - \beta\, a_{n-1} = 0$, où β est un réel à déterminer.
Celui ou celle qui ne trouvera pas la valeur de β continuera en ne lui affectant aucune valeur et en laissant β.

Q21. Démontrer alors que $a_{2p+1} = 0$ pour tout entier naturel p et écrire a_{2p} en fonction de $a_0 = 1$ et de p!

Q22. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue, c'est-à-dire le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Exercice 05

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \ \text{ et } \ \forall k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

On rappelle qu'une famille de polynômes tous de degré différent est une famille libre.

Q23. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions.

a. Soient $(a_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ soit la fonction nulle.

Démontrer que $a_{-1} = 0$ en partant de $\displaystyle\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k(x) = 0$ pour $x \in J$ et en faisant tendre x vers $+\infty$.

b. Démontrer alors que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = \text{Vect}(\mathscr{B})$.

c. En déduire la dimension de E.

Q24. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall x \in J, \quad g(x) = (1+x) f'(x).$$

a. Déterminer, pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.
On pourra écrire ces images en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}$.

b. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

c. Démontrer que le noyau de u est Vect (f_0) et déterminer l'image de u sous forme aussi d'un Vect.

d. Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

e. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.
(On pourra utiliser ce que l'on a trouvé à **Q24-a** pour former les colonnes de M.)

f. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Q25. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) $f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$.
(Attention, ici il n'y a pas de $y(t)$ mais cela reste une équation différentielle.)
Indication : il s'agit de trouver une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$.
On remarquera que $(\ln(1+t))' = \dfrac{1}{1+t}$.

Q26. Soit h_2 la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en zéro.

a. Montrer que $h_2(t) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+t)\right)^2$.

b. On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)y'(t)$ nulle en zéro.
Expliciter h_3 en faisant un process analogue à **Q25**.

c. En itérant le procédé, on note pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, h_k la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$.
Expliciter h_k.