CORRECTION Concours blanc Math 2023

Exercice 01

Q1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, (a,b) est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a,b)) = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & = & 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3a^2 - 3b & = & 0 \\ \\ 3b^2 - 3a & = & 0 \end{array} \right.$$

On trouve $(a,b) = (0,0)$ et si $a \neq 0$, il reste $a = a^4 \Rightarrow 1 = a^3 \Rightarrow a = 1$. Et donc $b = 1$. On peut conclure.

Les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

Q2. • Explicitons des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) < 0$. On peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^3$. Donc si $x < 0$, $f(x^3,0) < 0$. On peut s'approcher de $(0,0)$ (avec la distance euclidienne) par des points de la forme $(x_n,0)$ avec $x_n < 0$ et $\lim x_n = 0^-$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n,0) < 0$.
Explicitons de même des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) > 0$.

Reprenons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^3$. Donc si $x > 0$, $f(x^3,0) > 0$. On peut s'approcher de $(0,0)$ (avec la distance euclidienne) par des points de la forme $(x_n,0)$ avec $x_n > 0$ et $\lim x_n = 0^+$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n,0) > 0$.
• On en déduit que la fonction f n'admet en $(0,0)$ ni maximum local, ni minimum local. C'est un point selle.
Q3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = f(1+u,1+v) - f(1,1)$. Calculons, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v)$ puis, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
On commence par développer $f(1+u,1+v) - f(1,1)$:

$$g(u,v) = (1+u)^3 + (1+v)^3 - 3(1+u)(1+v) - (-1) = 3u^2 + 3v^2 - 3uv + u^3 + v^3.$$

Puis on remplace x par $r\cos\theta$ et y par $r\sin\theta$.

$$(1)\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta - 3r^2\cos\theta\sin\theta + r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta.$$

Pour prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2\left(\dfrac{1}{2} - 2r\right)$ à la question suivante, on va arranger l'expression trouvée dans le second membre de la dernière égalité (1) avec des formules trigo classiques.

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right).$$

Q4. Il s'agit de minorer $1 - \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) + r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$ par $\dfrac{1}{2} - 2r$.
Comme $\dfrac{1}{2}\sin(2\theta) \in [-1/2, 1/2]$ et $\cos^3\theta + \sin^3\theta \in [-2,2]$, on a les inégalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } \cos^3\theta + \sin^3\theta \geqslant -2.$$

On a bien l'inégalité attendu :

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right).$$

On peut remarquer que $\dfrac{1}{2} - 2r$ tend vers $1/2$ quand r tend vers 0. Or r tend vers 0 si et seulement si (u, v) tend vers $(0, 0)$ donc si et seulement si (x, y) tend vers $(1, 1)$. On peut préciser que pour $0 \leqslant r \leqslant 1/4$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 0$. Ainsi, dans le disque de centre $(1, 1)$ et de rayon $1/4$, $g(x, y) - g(1, 1) \geqslant 0$. Et la fonction f présente un minimum local en $(1, 1)$.

Q5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Le seul candidat possible est $(1, 1)$ car c'est déjà le seul extremum local qui est un minimum local. Est ce un minimum global ? On sait que $f(1, 1) = -1$. A t-on $f(x, y) \geqslant -1$ pour tout (x, y) ? On sait que $f(x, 0) = x^3$ et donc comme x^3 tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, $f(-2, 0) = -8 < -1$ par exemple. Donc $(1, 1)$ n'est pas un minimum global. En conclusion, il n'y a pas d'extremum global.

Exercice 02

Q6. On veut trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $F(n) = \dfrac{3}{n(n+3)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On peut mettre le dernier membre sous le même dénominateur et identifier les numérateurs. Il y a plus élégant.

$$xF(x) = \frac{3}{x+3} = a + \frac{xb}{x+3} \Rightarrow [xF(x)]_{x=0} = 1 = a.$$

$$(x+3)F(x) = \frac{3}{x} = \frac{a(x+3)}{x} + b \Rightarrow [(x+3)F(x)]_{x=-3} = -1 = b.$$

Ainsi $a = 1$ et $b = -1$.

Remarque : Attention avec cette dernière méthode, il faut prendre x pour variable et non n car n est un entier positif.

Q7-a. Quel est le but de **Q7** ?

Si l'on pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n = \dfrac{3\alpha}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définit une loi de probabilité si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n \geqslant 0$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge de somme 1.

Pour commencer la condition $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n \geqslant 0$ implique que $\alpha \geqslant 0$.

En supposant cette première condition remplie, montrons la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} p_n$, ce qui est demandé à cette question.

Comme elle est à termes positifs, en supposant $\alpha \neq 0$ (ce qui rest obligatoire pour la suite), on en déduit que comme $p_n \sim \dfrac{3\alpha}{n^4}$ et comme la série de terme général $\dfrac{3\alpha}{n^4}$ est une série de Riemann convergente, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 1} p_n$.

Q7-b Passons au calcul de la somme. Nous allons procéder par téléscopage. Pour cela, il faut transformer le terme général p_n en différence de deux termes consécutifs d'une certaine suite. Utilisons alors le résultat de la première question. En multipliant par $1/((n+1)(n+2))$, on trouve :

$$\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

On peut donc traduire avec p_n.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_n = \alpha\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

Écrivons pour tout N entier non nul, $S_N = \sum_{n=1}^{N} p_n$ en fonction de N et de α (sans le signe $\sum$).

$$S_N = \alpha \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

Puis, on fait un glissement d'indice dans la deuxième somme.

$$S_N = \alpha \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \alpha \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

Il ne reste que la différence des termes de plus bas et de plus haut indice.

$$S_N = \alpha\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right).$$

Q7-c Il reste à faire tendre N vers $+\infty$.

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} p_n = \frac{\alpha}{6}.$$

Pour avoir $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, on doit choisir $\alpha = 6$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathrm{P}(X = n) = \frac{18}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Remarque. Dans le rapport du jury, il est signalé que beaucoup de candidats ont calculé directement la somme sans passer par S_N et faire tendre N vers $+\infty$, ce qui a entraîné des écritures fausses.

Il a été trop souvent lu : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+3}$.

Par ailleurs pratiquement aucun candidat ne'a précisé que α doit être positif.

Q8-a On veut déterminer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X qui est par définition la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\mathrm{P}(X = n)$.

- Montrons la convergence (absolue) de cette série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\mathrm{P}(X = n)$.

Comme $n\mathrm{P}(X = n) \geqslant 0$ pour tout n, la convergence absolue est la convergence simple.

Remarque : On peut calculer directement la somme $E(X)$ ce qui prouve au passage la convergence mais l'énoncé demande de prouver d'abord la convergence. Donc si l'on veut tous les points à la question, autant le faire dans l'ordre.

Quand n tend vers $+\infty$, $n\mathrm{P}(X = n) = \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sim \frac{18}{n^3}$, terme général d'une série de Riemann convergente.

On peut en conclure que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\mathrm{P}(X = n)$ est absolument convergente.

Q8-b On va appliquer un raisonnement semblable à la somme des p_n. Plus précisément écrivons pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, $T_N = \sum\limits_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(X = n)$ en fonction de N et de α (sans le signe $\sum$).

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{9\left((n+3)-(n+1)\right)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

On utilise le fait que : $\dfrac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$.

$$T_N = 9\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right).$$

On procède comme plus haut par un glissement d'indice sur une des deux sommes.

$$T_N = 9\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = 9\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+2)(N+3)}\right).$$

Q8-c On fait tendre N vers $+\infty$.

$$\lim_{N\to+\infty} T_N = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = E(X).$$

Exercice 03

Q9. Il s'agit bien entendu de la somme d'une suite géométrique.

$$\sum_{k=0}^{r} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^{r+1}-1}{q-1} & \text{si } \; q \neq 1 \\ r+1 & \text{si } \; q = 1 \end{cases}.$$

Q10. Rapidement, on écrit : $X^p - 1 = (X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} X^k$.

Ainsi, le quotient dans la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X-1$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} X^k$ et le reste est nul.

Q11. Nous allons procéder par étapes.
On pose $P \in E_n$.
• *Première étape.* Montrons que l'application $P_0 : x \mapsto \displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$ est une fonction polynômiale de racine 1.
Déjà, on remarque que P_0 est l'unique primitive de $x \mapsto P(x)$ qui s'annule en $x = 1$. De plus, $x \mapsto P(x)$ étant une fonction polynomiale, il en est de même de P_0.
• *Deuxième étape.* On justifie alors l'existence de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_0 = (X-1)Q$ car 1 est racine de P_0.
Montrons que $Q \in E_n$ (c'est-à-dire que $\deg Q \leqslant n$).

$$\deg P_0 = 1 + \deg Q \Rightarrow \deg Q = \deg P_0 - 1 = \deg P + 1 - 1 = \deg P.$$

Comme $\deg P \leqslant n$, $\deg Q \leqslant n$. On passe alors à la fonction polynomiale $x \mapsto Q(x)$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; Q(x)(x-1) = P_0(x) = \int_1^x P(t)\,dt.$$

On divise par $x-1$ en éliminant le cas $x = 1$.

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt.$$

Et Q est unique pour un P donné car alors P_0 est unique (c'est l'unique primitive de P qui s'annule en 1) et Q est le quotient (unique pour la division euclidienne) de la division de P_0 par $X-1$.

• *Conclusion.* On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$, de E_n dans lui-même.

Q12. Comme l'image de E_n est inclus dans E_n, il reste à montrer que f est une application linéaire. Soient $P_1 \in E_n$ et $P_2 \in E_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \neq 1,\ f(P_1 + \lambda P_2)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \left(P_1 + \lambda P_2\right)(t)\,dt.$$

On applique la linéarité de l'intégrale.

$$\forall x \neq 1,\ f(P_1 + \lambda P_2)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P_1(t)\,dt + \frac{\lambda}{x-1}\int_1^x P_2(t)\,dt = f(P_1) + \lambda f(P_2).$$

Q13. On veut montrer que f est un automorphisme de E_n en déterminant, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
Pour cela, on va faire une analyse-synthèse.

• **a.** On suppose vérifiée l'équation $f(P) = Q$, d'inconnue $P \in E_n$, où Q est fixé dans E_n.

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt \Rightarrow \forall x \neq 1, \quad (x-1)Q(x) = \int_1^x P(t)\,dt.$$

On dérive par rapport à x.

$$\forall x \neq 1,\ P(x) = Q(x) + (x-1)Q'(x).$$

Donc s'il y a une solution c'est $P = Q + (X-1)Q'$. De plus, $P \in E_n$ clairement (car $Q \in E_n$).

Remarque : En toute rigueur, il faut justifier le passage d'une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ à un polynôme. Si l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $x \neq 1$, alors le polynôme $P - (Q + (X-1)Q')$ admet pour racines tous les réels différents de 1 et a donc une infinité de racines et est donc le polynôme nul et on a bien : $P = Q + (X-1)Q'$.

• **b.** Montrons réciproquement que $P = Q + (X-1)Q'$ convient, c'est-à-dire que l'on a l'égalité $f(Q + (X-1)Q') = Q$.
Il s'agit d'intégrer $t \mapsto Q + (t-1)Q'(t)$ entre 1 et x, de multiplier par $1/(x-1)$ et de reconnaître $Q(x)$.

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x-1}\int_1^x \big(Q(t) + (t-1)Q'(t)\big)\,dt = \frac{1}{x-1}\left[(t-1)Q(t)\right]_1^x = \frac{(x-1)Q(x)}{x-1} = Q(x).$$

On a bien : $f(Q + (X-1)Q') = Q$.

• **c.** Conclusion : Ainsi, pour tout $Q \in E_n$, l'équation $Q = f(P)$ admet une unique solution $P \in E_n$. f est donc bijective car tout élément de E_n admet exactement un antécédent. Et on a explicité f^{-1}.

$$\forall Q \in E_n, \quad f^{-1}(Q) = Q + (X-1)Q' = \left((X-1)Q\right)'.$$

Remarque : La suite du sujet nous incite à montrer la bijectivité en déterminant la fonction réciproque. Ceci dit l'énoncé peut laisser supposer que l'on demande d'abord de prouver la bijectivité et ensuite de trouver la fonction réciproque, ce que ont fait la majorité des candidats. Pour prouver la bijectivité, comme f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, montrer l'injectivité suffit. Faisons le. Il s'agit de montrer que le seul antécédent du polynôme nul par f est le polynôme nul. Partons donc de $f(P)(x) = 0$ pour tout $x \neq 1$.

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt = 0.$$

Cela implique que pour tout $x \neq 1$, $\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt = 0$. Or pour $x = 1$, $\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt = 0$. Donc cette égalité est alors vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Maintenant, il ne faut pas en conclure sans autre formalité que $P = 0$ comme cela a été vu dans beaucoup de copies. Il faut faire un (petit) raisonnement. La fonction $P_0 : x \mapsto \displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$ est nulle sur $\mathbb{R}$ donc sa dérivée $x \mapsto P(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}$. Donc le polynôme associé est bien le polynôme nul et f est bien injective donc bijective.

Q14. *Détermination de la matrice A représentative de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n qui est, rappelons-le : $\left(1, X, X^2, ..., X^n\right)$.*

IL s'agit donc de construire A colonne par colonne, chaque colonne étant les composantes de $f(X^k)$ exprimé dans $\mathscr{B}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Posons donc $k \in [\![0,n]\!]$.

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k\,dt = \frac{1}{x-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x = \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k} x^l.$$

On peut passer aux polynômes associés.

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ f(X^k) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k} X^l.$$

On en déduit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/(n+1) \end{pmatrix}$.

Q15. *Détermination de la matrice A^{-1} représentative de f^{-1} dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.*
Il s'agit donc de construire A^{-1} colonne par colonne, chaque colonne étant les composantes de $f^{-1}(X^k)$ exprimé dans $\mathscr{B}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
Pour $k = 0$, $f^{-1}(1) = 1$. Puis posons $k \in [\![1,n]\!]$.

$$f^{-1}(X^k) = X^k + (X-1)kX^{k-1} = (k+1)X^k - kX^{k-1}.$$

Par exemple $f^{-1}(X) = -1 + 2X$ et $f^{-1}(X^2) = -2X + 3X^2$.

On en déduit alors la matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$.

Q16. On remarque que les matrices A et A^{-1} sont triangulaires supérieures et leurs valeurs propres sont donc les coefficients diagonaux. On remarque au passage que chacune des matrices a $n+1$ valeurs propres distinctes.

On écrit les deux spectres.

$$\mathrm{Sp}_(A) = \left\{\frac{1}{k+1},\ k \in [\![0,n]\!]\right\}, \quad \mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{k+1,\ k \in [\![0,n]\!]\}.$$

Remarque : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses de celles de A. Rien de surprenant !

Q17. Les $n+1$ valeurs propres réelles des matrices carrées d'ordre $n+1$, A et A^{-1} sont distinctes. Elles sont donc diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres sont en prime de dimension 1.

Q18. On a remarqué avec les questions **Q13** et **Q14** que dans la base canonique de E_n, les valeurs propres de A (donc de f) sont dans l'ordre $1, 1/2, ..., 1/(n+1)$ et celles de A^{-1} (donc de f^{-1}) sont dans l'ordre $1, 2, ..., n+1$. Et les sous-espaces propres de f et de f^{-1} sont tous de dimension 1. L'idée est donc de montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les deux-sous espaces propres $E_{\frac{1}{k+1}}(f)$ et $E_{k+1}(f^{-1})$ sont égaux.
Posons $P \in E_n$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Montrons l'équivalence :

$$P \in \ker\left(f - \frac{1}{k+1}\mathrm{Id}_{E_n}\right) \Leftrightarrow P \in \ker\left(f^{-1} - (k+1)\mathrm{Id}_{E_n}\right).$$

On raisonne donc par équivalences.

$$P \in \ker\left(f - \frac{1}{k+1}\mathrm{Id}_{E_n}\right) \Leftrightarrow f(P) = \frac{1}{k+1}P \Leftrightarrow P = f^{-1}\left(\frac{1}{k+1}P\right)$$

$$P = \frac{1}{k+1}f^{-1}(P) \Leftrightarrow f^{-1}(P) = (k+1)P \Leftrightarrow P \in \ker\left(f^{-1} - (k+1)\mathrm{Id}_{E_n}\right).$$

Donc les deux-sous espaces propres $E_{\frac{1}{k+1}}(f)$ et $E_{k+1}(f^{-1})$ sont égaux.

Exercice 04

Q19. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, rayon de conbergence que l'on déterminera plus loin que l'on suppose strictement positif. On sait que g, en tant que somme d'une série entière est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et dérivable terme à terme. En particulier, on a les formules, d'après le cours :

$$\forall x \in]-R, R[,\ g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Q20. Pour commencer, si l'on remplace x par 0 dans $(**)$, on a : $g'(0) = 0$ et comme $g'(0) = a_1$, on a : $a_1 = 0$.
- On fixe maintenant $x \in]-R, R[$ et dans l'expression $xy''(x) + y'(x) - 4xy(x)$, on remplace $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ par leurs sommes. Et $xy''(x) + y'(x) - 4xy(x)$ devient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}.$$

Puis on change d'indice dans les sommes pour avoir partout du x^n. L'expression devient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n.$$

On regroupe en une somme avec n variant de 1 à $+\infty$ en isolant le seul terme concerné par $n = 0$. Notre expression devient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)n a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - 4a_{n-1}\right)x^n + a_1.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$, $xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - 4a_{n-1}\right) x^n + a_1 = 0.$$

Comme le développement en série entière est unique, $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.x^n$, on en déduit la relation demandée (et on retrouve $a_1 = 0$).

$$\begin{cases} a_1 &= 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ (n+1)^2 a_{n+1} - 4a_{n-1} &= 0, \end{cases}.$$

Q21. Translatons d'un indice le résultat prćéddent, ce sera mieux pour la suite.

$$\begin{cases} a_1 &= 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} &= \dfrac{4}{(n+2)^2} a_n, \end{cases}.$$

Nous allons distinguer les indices pairs des indices impairs.

- Supposons $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. En appliquant $a_{n+2} = \dfrac{4}{(n+2)^2} a_n$ avec $n = 2p+1$, on a : $a_{2p+3} = \dfrac{4}{(2p+3)^2} a_{2p+1}$. Pour $p = 0$, on a : $a_3 = 0$. Montrons donc que $a_{2p+1} = 0$ pour tout entier p. L'initialisation est faite. Supposons $a_{2p+1} = 0$ alors

$$a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = \frac{4}{(2p+3)^2} \times 0 = 0.$$

Donc $a_{2p+1} = 0$ pour tout entier p.

- Supposons $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors on calcule a_{2p} pour $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ et $p = 4$ puis on ≪ devine ≫ une formule à montrer par récurrence.

$$a_2 = \frac{4}{2^2} a_0 = a_0,\ a_4 = \frac{4}{4^2} a_2 = \frac{1}{4} a_0,\ a_6 = \frac{4}{6^2} a_4 = \frac{4}{6^2}\frac{1}{4} a_0 = \frac{1}{6^2} a_0,$$

$$a_8 = \frac{4}{8^2} a_6 = \frac{4}{8^2}\frac{1}{6^2} a_0 = \frac{1}{24^2} a_0.$$

On fait donc l'hypothèse que $a_{2p} = \dfrac{1}{(p!)^2} a_0$. Cette proposition est vraie pour les premieères valeurs de p. Supposons vraie pour p donné.

$$a_{2p+2} = \frac{4}{(2p+2)^2} a_{2p} = \frac{4}{(2p+2)^2} \times \frac{1}{(p!)^2} a_0 = \frac{1}{(p+1)^2} \times \frac{1}{(p!)^2} a_0 = \frac{1}{((p+1)!)^2} a_0.$$

Q22. On veut en fait déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = \sum_{p \geqslant 0} a_{2p} x^{2p}$ qui est donc partiellement lacunaire. Il faut donc revenir à la règle de D'Alembert classique. Soit $x \in \mathbb{R}$ non nul et posons $u_p(x) = \dfrac{1}{(p!)^2} a_0 x^{2p}$.

$$\left| \frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)} \right| = \left| \frac{\dfrac{1}{((p+1)!)^2} a_0 x^{2p+2}}{\dfrac{1}{(p!)^2} a_0 x^{2p}} \right| = \frac{1}{(p+1)^2} x^2.$$

Cette quantité tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Donc pour $x \neq 0$, la série $\sum_{p\geqslant 0} a_{2p}x^{2p}$ est absolument convergente et donc $R = +\infty$. Et g est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Ne pas oublier que la formule $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{R}$ pour trouver le rayon de convergence R ne fonctionne que si $a_n \neq 0$ pour tout n et ici $a_n = 0$ pour n impair.
Par ailleurs, certains dans la rédaction oublient les valeurs absolues en appliquant d'Alembert, fatal error !

Exercice 05

Q23-a Soient $(a_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ soit la fonction nulle.

Démontrons que $a_{-1} = 0$ en partant de $\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k(x) = 0$ pour tout $x \in J =]-1, +\infty[$ et en faisant tendre x vers $+\infty$. On isole le terme de la somme correspondant à $k = -1$. Et on fera alors tendre x vers $+\infty$. En effet, on remarque que $f_{-1}(x)$ tend alors vers $+\infty$, $f_k(x)$ tend vers 0 pour $k \in [\![2, p]\!]$ et $f_0(x)$ est constant.

$$\forall x \in J, \quad a_{-1}\ln(1+x) = -\sum_{k=0}^{p} a_k f_k(x) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k}.$$

On fait donc tendre x vers $+\infty$. Le membre le plus à droite de la double égalité précedente tend vers $-a_0$ qui est une limite finie. Il faut donc que le membre du milieu $a_{-1}\ln(1+x)$ ait une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Et cela entraîne que $a_{-1} = 0$.

Q23-b Démontrons que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ est libre. Pour cela, on part de la relation :

$$\forall x \in J, \sum_{k=-1}^{p} a_k f_k(x) = 0.$$

Le but du jeu est de montrer que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$. On sait déjà d'après **Q23-a** que $a_{-1} = 0$. Transformons donc la dernière égalité en remplaçant chaque $f_k(x)$ par son expression.

$$\forall x \in J,\ a_0 + \frac{a_1}{1+x} + ... + \frac{a_p}{(1+x)^p} = 0.$$

Multiplions par $(1+x)^p$ chaque membre de la dernière égalité.

$$\forall x \in J,\ a_0(1+x)^p + a_1(1+x)^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(1+x) + a_p = 0.$$

La famille de polynômes $\left((1+X)^k\right)_{k\in[\![0,p]\!]}$ est une famille de polynômes échelonnée en degré, elle est donc libre. On peut conclure.

$$\forall k \in [\![0, p]\!],\ a_k = 0.$$

Et en rajoutant $a_{-1} = 0$, on en déduit que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

Q23-c La famille $\mathscr{B}$ engendre E car $E = \text{Vect}(\mathscr{B})$. Comme elle est libre d'après la question précédente **Q23-b**, elle est donc une base de E. Et comme son cardinal est $p + 2$, on peut conclure.

$$\dim(E) = \text{card}(\mathscr{B}) = p + 2.$$

Q24-a On commence par f_{-1}.

$$\forall x \in J,\ u\left(f^{-1}\right)(x) = (1+x)f'_{-1}(x) = 1 = f_0(x).$$

Puis continuons avec f_0.

$$\forall x \in J,\ u\left(f_0\right)(x) = (1+x)f'_0(x) = 0.$$

Enfin prenons $k \in [\![1, p]\!]$.

$$\forall x \in J,\ u\left(f_k\right)(x) = (1+x)f'_k(x) = (1+x)(-k(1+x)^{-k-1}) = -kf_k(x).$$

On remarque que la dernière égalité est aussi vraie pour $k = 0$.

Q24-b • *Linéarité*. Prenons $(f, h) \in E^2$ et $a \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in J,\ u(f+ah)(x) = (1+x)(f+ah)'(x) = (1+x)f'(x) + a(1+x)h'(x) = u(f)(xc) + au(h)(x).$$

• *Endomorphisme de E*. Il reste à justifier que $u(f) \in E$ pour tout $f \in E$. Comme u est linéaire et comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il suffit de vérifier que les images par u des vecteurs de $\mathscr{B}$ sont dans E, donc sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{B}$. Or d'après **2.1**, $u\left(f^{-1}\right) = f_0 \in E$ et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $u(f_k) = -kf_k \in E$.

Q24-c • Déterminons le noyau de u. Prenons $f \in \ker u$, on a alors : $u(f) = 0_E$.

$$\forall x \in J,\ (1+x)f'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in J,\ f'(x) = 0.$$

Ainsi f est constante sur J. Réciproquement, toute fonction constante vérifie $u(f) = 0_E$.
En conclusion, $\ker(u)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur J, c'est-à-dire $\ker(u) = \mathrm{Vect}(f_0)$.

• Déterminons l'image de u. On part de la question précédente. E est engendré par $\mathscr{B}$ et l'image de u est engendrée par $u(\mathscr{B})$ car u est un endomorphisme.
Et donc $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left((u(f_{-1})) \cup (u(f_k))_{k\in[\![0,p]\!]}\right)$. Puis on utilise la question **Q23-b**.

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left((f_0) \cup (-kf_k)_{k\in[\![0,p]\!]}\right) = \mathrm{Vect}\left((f_0) \cup (f_k)_{k\in[\![1,p]\!]}\right) = \mathrm{Vect}\left((f_k)_{k\in[\![0,p]\!]}\right).$$

Remarque : On peut aussi invoquer la loi du rang : $\dim \mathrm{Im}\, u = \dim E - \dim \ker u = p + 2 - 1 = p + 1$. Or comme les fonctions f_k pour $k \in [\![0, p]\!]$ sont dans $\mathrm{Im}\, u$ et comme forment une famille libre de $p + 1$ éléments, elles en constituent une base.

Q24-d Comme f_{-1} n'appartient pas à $\mathrm{Im}\, u$, directement : $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \emptyset$.

Q24-e Il s'agit d'écrire les colonnes de la matrice M qui représentent les images de $u\left(f^{-1}\right)$, $u\left(f_0\right)$, ..., $u\left(f_p\right)$ dans la base $\mathscr{B}$. On la fait avant.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

On peut faire une écriture en blocs de M en posant

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix},$$

la matrice $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. Alors on a : $M = \begin{pmatrix} T & 0_{\mathrm{M}_{2,p}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{p,2}(\mathbb{R})} & D \end{pmatrix}$.

Q24-f Montrer que u est diagonalisable revient à montrer que M l'est. Comme M est une matrice triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Inutile de déterminer son polynôme caractéristique. Le spectre de M est constitué de 0 et des entiers $-k$ avec $k \in [\![1, p]\!]$. Or 0 est une valeur propre d'ordre 2. Comme $\dim \operatorname{Ker} M = 1 < 2$, l'espace propre associé à la valeur propre 0 a une dimension différente de son ordre de multiplicité. On peut conclure. M (et donc u) n'est pas diagonalisable.

Q25. On veut résoudre sur J l'équation différentielle (ED) $f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$.

Remarque : Attention, ici il n'y a pas de $y(t)$ mais cela reste une équation différentielle. Et pas la peine d'appliquer la méthode de résolution classique d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Beaucoup de candidats ont fait des développements catastrophiques alors que la question n'est que de trouver les primitives de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$.

On remarque que $(\ln(1+t))' = \dfrac{1}{1+t}$. Et donc il s'agit de trouver les primitives de $t \mapsto f'_{-1}(t)f_{-1}(t)$. Donc ce sont les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{2}f_{-1}^2(t) + K$, où $K \in \mathbb{R}$.

Q26-a La solution de (ED) nulle en 0 est donc : $h_2(t) = \dfrac{1}{2}f_{-1}^2(t) = \dfrac{1}{2}(\ln(1+t))^2$. En effet, comme $\ln 1 = 0$, nécessairement $K = 0$.

Q26-b Alors notons h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)y'(t)$ nulle en zéro. Suivons un process identique à plus haut. h_3 est une primitive de

$$t \mapsto \frac{1}{2}(\ln(1+t))^2.\frac{1}{1+t} \text{ ou encore } t \mapsto \frac{1}{2}f_{-1}^2(t)f'_{-1}(t).$$

On intègre par rapport à t et on introduit une constante additive K_3.

$$\forall t \in J, \quad h_3(t) = \frac{1}{6}f_{-1}^3(t) + K_3 = \frac{(\ln(1+t))^3}{6} + K_3.$$

Comme $h_3(0) = 0$ alors $K_3 = 0$. Et $h_3 : t \mapsto \dfrac{(\ln(1+t))^3}{6}$.

Q26-c Démontrons par récurrence sur k que pour tout entier $k \geqslant 2$ et tout $t \in J$, on a : $h_k(t) = \dfrac{(\ln(1+t))^k}{k!}$.

- *Initialisation*

C'est fait pour $k = 2$ (et aussi $k = 3$).

- *Transmission*

Supposons k un entier supérieur ou égal à 2 fixé et on suppose que pour tout $t \in J$, on a : $h_k(t) = \dfrac{(\ln(1+t))^k}{k!}$ avec $h_k(0) = 0$.

$$\forall t \in J, \quad h'_{k+1}(t) = \frac{h_k(t)}{1+t} = \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+t))^k}{1+t}.$$

Il reste à intégrer. L'application $t \mapsto \dfrac{(\ln(1+t))^k}{1+t}$ est de la forme $f'_{-1} f^k_{-1}$. Une primitive en est donc $\dfrac{f^{k+1}_{-1}}{k+1}$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \dfrac{(\ln(1+t))^{k+1}}{k+1}$.
Et il existe $K_{k+1} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad h_{k+1}(t) = \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{k+1} + K_{k+1} = \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{(k+1)!} + K_{k+1}.$$

Comme $h_{k+1}(0) = 0$, on a encore $K_{k+1} = 0$. Et h_{k+1} est bien l'application $t \mapsto \dfrac{(\ln(1+t))^{k+1}}{(k+1)!}$ et on a l'assertion au rang $k+1$.