Stabilisateur d'images Slick

Partie I. Etude du capteur d'accélération

Objectif : Relier l'accélération de la caméra à la tension de sortie du capteur.

Q1.

a) Appliquer le théorème de la résultante dynamique à **4** en projection sur $\overrightarrow{x_0}$ et montrer que :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{2\mu}{m_4}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{2k}{m_4}x(t)=-a(t) \tag{1}$$

Théorème de résultante dynamique appliqué à 4 en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

J'isole 4. Il est soumis à :

- La pesanteur (portée par $\overrightarrow{x_0}$).
- La liaison glissière de direction $\overrightarrow{x_0}$.
- Les 2 ressorts entre 3 et 4 (portés par $\overrightarrow{x_0}$).
- Les 2 amortisseurs entre 3 et 4 (portés par $\overrightarrow{x_0}$).

Etude des ressorts :

Longueur à vide : l_0

Longueur à l'équilibre : l_{eq}

Longueur en fonctionnement : $l_{eq}+\left(x_4(t)-x_3(t)\right)=l_{eq}+x(t)$ pour le ressort de gauche

$l_{eq}-\left(x_4(t)-x_3(t)\right)=l_{eq}-x(t)$ pour le ressort de droite

Force des 2 ressorts, en considérant $l_{eq}>l_0$ (le raisonnement est similaire dans le cas contraire) :

$\overrightarrow{F_{RG}}=-k\left(\left(l_{eq}+x(t)\right)-l_0\right)\overrightarrow{x_0}$ pour le ressort de gauche

$\overrightarrow{F_{RG}}=+k\left(\left(l_{eq}-x(t)\right)-l_0\right)\overrightarrow{x_0}$ pour le ressort de droite

$\overrightarrow{F_{2R}}=-2kx(t)\overrightarrow{x_0}$ pour les 2 ressorts

Etude des amortisseurs :

Vitesse de déplacement de 4 par rapport à 3 : $\dfrac{d\left(x_4(t)-x_3(t)\right)}{dt}\overrightarrow{x_0}=\dfrac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{x_0}$

Force des 2 amortisseurs : $\overrightarrow{F_{AG}}=-\mu\dfrac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{x_0}$ pour l'amortisseur de gauche

$\overrightarrow{F_{AD}}=-\mu\dfrac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{x_0}$ pour l'amortisseur de droite

$\overrightarrow{F_{2A}}=-2\mu\dfrac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{x_0}$ pour les 2 amortisseurs

Etude de l'accélération de 4 dans $R_0\left(O_0,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$:

Position du solide 4 dans le référentiel galiléen R_0 : $\overrightarrow{O_0O_4}=x_4(t)\overrightarrow{x_0}$

Vitesse du solide 4 dans le référentiel galiléen R_0 : $\overrightarrow{V_{O_4/0}}=\dfrac{dx_4(t)}{dt}\overrightarrow{x_0}$

Accélération du solide 4 dans le référentiel galiléen R_0 : $\overrightarrow{A_{O_4/0}}=\dfrac{d^2x_4}{dt^2}\overrightarrow{x_0}=\dfrac{d^2\left(x(t)+x_3(t)\right)}{dt^2}\overrightarrow{x_0}$.

Théorème de résultante dynamique appliqué à 4 en projection sur $\overrightarrow{x_0}$:

$m_4 \dfrac{d^2\left(x(t)+x_3(t)\right)}{dt^2} = -2kx(t) - 2\mu \dfrac{dx(t)}{dt}$ soit $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \dfrac{d^2x_3(t)}{dt^2} = -\dfrac{2k}{m_4}x(t) - \dfrac{2\mu}{m_4}\dfrac{dx(t)}{dt}$, et :

$$\underline{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{2\mu}{m_4}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{2k}{m_4}x(t) = -a(t)}$$

b) Proposer, en justifiant votre réponse, une expression de la fréquence de variation de $a(t)$ en dessous de laquelle on peut considérer que :

$$a(t) \approx -\frac{2k}{m_4}x(t) \qquad (2)$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m_4}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{2\mu}{m_4}$, l'équation (1) devient : $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = -a(t)$

Considérer que $a(t) \approx -\dfrac{2k}{m_4}x(t)$ revient à considérer que $a(t)$ et $x(t)$ ont la même pulsation ω.

Posons : $\underline{a(t)} = A_0 e^{j\omega t} = \underline{A_0} e^{j\omega t}$ et $\underline{x(t)} = X_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X_0} e^{j\omega t}$.

Alors, $\dfrac{d\underline{x(t)}}{dt} = j\omega \underline{X_0} e^{j\omega t}$ et $\dfrac{d^2\underline{x(t)}}{dt^2} = -\omega^2 \underline{X_0} e^{j\omega t}$.

L'équation (1) devient : $-\omega^2 \underline{X_0} + \dfrac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{X_0} + \omega_0^2 \underline{X_0} = -\underline{A_0}$, soit : $\dfrac{\underline{X_0}}{\underline{A_0}} = \dfrac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} j\omega}$

Calculons $\left|\dfrac{\underline{X_0}}{\underline{A_0}}\right|$: $\left|\dfrac{\underline{X_0}}{\underline{A_0}}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}} = \dfrac{1}{\omega_0^2}\sqrt{\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$.

Il s'agit ici d'un accéléromètre, l'amortissement ne peut donc pas être trop important.
Ainsi, on considérera $Q \geq 1$.

Ainsi, si on prend $\omega_0 >> \omega$, $\left|\dfrac{\underline{X_0}}{\underline{A_0}}\right| \approx \dfrac{1}{\omega_0^2}$.

De plus, puisque $\omega_0 >> \omega$, $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$, et :

$$\varphi = \arg\left(\frac{\underline{X_0}}{\underline{A_0}}\right) = \arg\left(\frac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) \approx \pi$$

Ainsi : $\dfrac{\underline{X_0}}{\underline{A_0}} \approx \dfrac{1}{\omega_0^2}e^{j\pi} \approx -\dfrac{1}{\omega_0^2}$ donc $\underline{a(t)} \approx -\omega_0^2 \underline{x(t)}$ et $a(t) \approx -\dfrac{2k}{m_4}x(t)$.

Or $\omega_0 >> \omega$ se traduit par $\omega_0 > 10\omega$ c'est-à-dire $\omega < \dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{2k}{m_4}}$.

Ainsi, <u>si $f < \dfrac{1}{20\pi}\sqrt{\dfrac{2k}{m_4}}$, alors</u> $\underline{a(t) \approx -\dfrac{2k}{m_4}x(t)}$.

Q2.

a) À partir de la loi des nœuds, donner la relation entre $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, V_s, C_1, C_2 et R.

La loi des nœuds permet d'écrire $\underline{i_{C_1}}+\underline{i_{C_2}}+\underline{i_{R_1}}+\underline{i_{R_2}}=0$ en prenant les courants convergeant vers le nœud.

Soit : $\dfrac{\underline{V_1}-\underline{V_3}}{\dfrac{1}{jC_1\omega}}+\dfrac{\underline{V_2}-\underline{V_3}}{\dfrac{1}{jC_1\omega}}+\dfrac{0-\underline{V_3}}{R}+\dfrac{\underline{V_s}-\underline{V_3}}{R}=0$ ou encore $\left(\underline{V_1}-\underline{V_3}\right)jRC_1\omega+\left(\underline{V_2}-\underline{V_3}\right)jRC_2\omega-\underline{V_3}+\underline{V_s}-\underline{V_3}=0$.

Ainsi, $\underline{V_1}\,jRC_1\omega+\underline{V_2}\,jRC_2\omega+\underline{V_s}=\underline{V_3}\left(2+jR\left(C_1+C_2\right)\omega\right)$, soit, en écriture temporelle :

$$\underline{\frac{dv_1(t)}{dt}RC_1+\frac{dv_2(t)}{dt}RC_2+V_s=\frac{dv_3(t)}{dt}R\left(C_1+C_2\right)+2v_3(t)}.$$

b) En déduire l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv_3(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v_3(t)=\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}V_1\omega\cos(\omega t)+\frac{V_s}{2\tau} \qquad (3)$$

Donner l'expression de τ en fonction de R, C_1 et C_2.

En remplaçant : $V_1\omega\cos(\omega t)RC_1-V_1\omega\cos(\omega t)RC_2+V_s=\dfrac{dv_3(t)}{dt}R\left(C_1+C_2\right)+2v_3(t)$

Soit : $V_1\omega\cos(\omega t)R\left(C_1-C_2\right)+V_s=\dfrac{dv_3(t)}{dt}R\left(C_1+C_2\right)+2v_3(t)$

Et : $\dfrac{dv_3(t)}{dt}+\dfrac{2}{R\left(C_1+C_2\right)}v_3(t)=V_1\omega\cos(\omega t)\dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}+\dfrac{V_s}{R\left(C_1+C_2\right)}$

Finalement : $\underline{\dfrac{dv_3(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}v_3(t)=\dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}V_1\omega\cos(\omega t)+\dfrac{V_s}{2\tau}}$ avec $\underline{\tau=\dfrac{R\left(C_1+C_2\right)}{2}}$.

Q3.

a) Donner l'expression de C_1, puis de C_2 en fonction de ε, S, $x(t)$ et de d. En déduire l'expression de $\dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}$ en fonction de $x(t)$ et d.

On sait que $C=\dfrac{\varepsilon S}{e}$. Or $e_1(t)=d+x_4(t)-x_3(t)=d+x(t)$ et $e_2(t)=d-x(t)$, on peut en déduire que :

$$C_1-C_2=\frac{\varepsilon S}{e_1(t)}-\frac{\varepsilon S}{e_2(t)}=\frac{\varepsilon S}{d+x(t)}-\frac{\varepsilon S}{d-x(t)}=\frac{\varepsilon S\left(\left(d-x(t)\right)-\left(d+x(t)\right)\right)}{\left(d+x(t)\right)\cdot\left(d-x(t)\right)}$$

De même, $C_1+C_2=\dfrac{\varepsilon S\left(\left(d-x(t)\right)+\left(d+x(t)\right)\right)}{\left(d+x(t)\right)\cdot\left(d-x(t)\right)}$

On a donc : $\dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}=\dfrac{\left(d-x(t)\right)-\left(d+x(t)\right)}{\left(d-x(t)\right)+\left(d+x(t)\right)}$, soit : $\underline{\dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}=-\dfrac{x(t)}{d}}$

b) En déduire, en utilisant également les équations (2) et (4), l'expression de $a(t)$ en fonction de $v_3(t)$ et des données.

En reprenant l'équation (4) et le résultat précédent, on peut écrire : $v_3(t)=\dfrac{V_s}{2}-\dfrac{x(t)}{d}V_1\sin(\omega t)$.

Ainsi $\dfrac{x(t)}{d}V_1\sin(\omega t)=\dfrac{V_s}{2}-v_3(t)$ et $x(t)=\dfrac{d}{V_1\sin(\omega t)}\left(\dfrac{V_s}{2}-v_3(t)\right)$.

Comme $a(t)\approx-\dfrac{2k}{m_4}x(t)$, alors $\underline{a(t)\approx\dfrac{2kd}{m_4V_1\sin(\omega t)}\left(v_3(t)-\dfrac{V_s}{2}\right)}$.

Partie II. Représentation mathématique de l'orientation de la caméra

Q4. Justifier, sans calcul, que R, matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_3$, appartient à $SO_3(\mathbb{R})$.

$SO_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1.

$\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_3$ sont deux bases orthonormées donc R est orthogonale. Les 2 bases sont directes donc le déterminant de R est positif.

<u>R est orthogonale de déterminant 1, donc elle appartient à $SO_3(\mathbb{R})$.</u>

II.1 - Les angles de Cardan

Q5. Exemple : on considère la matrice $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

a) Justifier que A est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$.

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ donc } A^T=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Calculons $AA^T=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$AA^T=\begin{pmatrix} 1/2+1/4+1/4 & 0+\sqrt{2}/4-\sqrt{2}/4 & -1/2+1/4+1/4 \\ 0+\sqrt{2}/4-\sqrt{2}/4 & 0+1/2+1/2 & 0+\sqrt{2}/4-\sqrt{2}/4 \\ -1/2+1/4+1/4 & 0+\sqrt{2}/4-\sqrt{2}/4 & 1/2+1/4+1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la 1ère colonne :

$$\det A=\sqrt{2}/2\left(\sqrt{2}/4+\sqrt{2}/4\right)-0+\left(-\sqrt{2}/2\right)\left(-\sqrt{2}/4-\sqrt{2}/4\right)=1/2+0+1/2=1$$

$AA^T=I_3$ et $\det A=1$ donc $A\in SO_3(\mathbb{R})$. <u>A est donc une matrice de rotation de $\mathbb{R}^3$.</u>

b) Montrer l'existence et l'unicité des angles de Cardan pour cette matrice A et les déterminer.

Par identification et sachant que : $\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$, $\theta\in]-\pi,\pi]$ et $\psi\in]-\pi,\pi]$

$-\sin(\theta)=-\sqrt{2}/2 \Leftrightarrow \sin(\theta)=\sqrt{2}/2 \Leftrightarrow \theta=\pi/4$ ou $\theta=3\pi/4$

Or $\sin(\varphi)\cos(\theta)=0$ et $\cos(\theta)\neq 0$ (car $\theta=\pi/4$ ou $\theta=3\pi/4$) donc $\sin(\varphi)=0$ donc $\varphi=0$

Et $\cos(\varphi)\cos(\theta)=\sqrt{2}/2$ et $\cos(\varphi)=1$ (car $\varphi=0$), donc $\cos(\theta)=\sqrt{2}/2$ et $\theta=\pi/4$ ou $\theta=-\pi/4$.

Or on a d'un côté $\theta=\pi/4$ ou $\theta=3\pi/4$ et de l'autre $\theta=\pi/4$ ou $\theta=-\pi/4$ donc $\theta=\pi/4$.

$\cos(\theta)\sin(\psi)=1/2$ donc $\sin(\psi)=\sqrt{2}/2$ et $\cos(\theta)\cos(\psi)=1/2$ donc $\cos(\psi)=\sqrt{2}/2$. Ainsi $\psi=\pi/4$.

<u>A est donc une matrice de rotation d'angles de Cardan $\varphi=0$, $\theta=\pi/4$ et $\psi=\pi/4$.</u>

(On peut vérifier, qu'avec ces valeurs, on retrouve les autres coefficients de la matrice A)

Q6. Illustration du blocage de Cardan : on considère la matrice $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$

a) Justifier que B est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$.

$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ donc $B^T=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

Calculons $BB^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1+0&0+0+0&0+0+0\\0+0+0&0+0+1&0+0+0\\0+0+0&0+0+0&1+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

Donc B est orthogonale.

De plus, en développant par rapport à la 1ère colonne : $\det B=0-0+(-1)(-1+0)=1$.

Ainsi, $B\in O_3(\mathbb{R})$ et $\det B=1$ donc $B\in SO_3(\mathbb{R})$. <u>B est donc une matrice de rotation de $\mathbb{R}^3$.</u>

<u>Remarque :</u> Pour montrer que B est orthogonale, on peut aussi dire que les colonnes sont orthogonales 2 à 2 et de norme 1.

b) Montrer que Justifier que la détermination des angles de Cardan pour la matrice B équivaut à trouver $\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$, $\theta\in]-\pi,\pi]$ et $\psi\in]-\pi,\pi]$, tels que $\theta=\pi/2$, $\sin(\varphi-\psi)=-1$ et $\cos(\varphi-\psi)=0$.

Par identification et sachant que : $\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$, $\theta\in]-\pi,\pi]$ et $\psi\in]-\pi,\pi]$

$-\sin(\theta)=-1\Leftrightarrow\sin(\theta)=1\Leftrightarrow\theta=\pi/2$.

La matrice R devient : $R=\begin{pmatrix}0&\cos(\varphi)\sin(\psi)-\sin(\varphi)\cos(\psi)&\cos(\varphi)\cos(\psi)+\sin(\varphi)\sin(\psi)\\0&\sin(\varphi)\sin(\psi)+\cos(\varphi)\cos(\psi)&\sin(\varphi)\cos(\psi)-\cos(\varphi)\sin(\psi)\\-1&0&0\end{pmatrix}$,

soit $R=\begin{pmatrix}0&-\sin(\varphi-\psi)&\cos(\varphi-\psi)\\0&\cos(\varphi-\psi)&\sin(\varphi-\psi)\\-1&0&0\end{pmatrix}$ et par identification $\begin{cases}\sin(\varphi-\psi)=-1\\\cos(\varphi-\psi)=0\end{cases}$

<u>On a donc : $\theta=\pi/2$, $\sin(\varphi-\psi)=-1$ et $\cos(\varphi-\psi)=0$.</u>

c) Sachant que ces angles sont utilisés pour redresser la caméra par trois rotations successives, en quoi cela pose-t-il problème ?

$\cos(\varphi-\psi)=0\Leftrightarrow\varphi-\psi=+\pi/2$ ou $\varphi-\psi=-\pi/2$

$\sin(\varphi-\psi)=-1\Leftrightarrow\varphi-\psi=-\pi/2\Leftrightarrow\psi=\varphi+\pi/2$

B est donc une matrice de rotation d'angles de Cardan non uniques $\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$, $\theta=0$ et $\psi=\varphi+\pi/2$.

(On vérifie $\psi\in[0,\pi]\subset]-\pi,\pi]$)

Les angles sont utilisés pour faire pivoter la caméra en vue de la maintenir dans une position donnée. S'il existe plusieurs angles de Cardan, il existe également plusieurs rotations possibles, donc plusieurs mouvements possibles pour une même position de départ et d'arrivée.

Or le maintien de la caméra oblige à avoir un mouvement unique.

II.2 - Les quaternions

Q7. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

$M(0,0,0,0)$ est l'élément neutre de $\mathcal{E}$ et $M(0,0,0,0)\in H$.

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $(a',b',c',d')\in\mathbb{R}^4$. Calculons $M(a,b,c,d)+\lambda M(a',b',c',d')$.

$$M(a,b,c,d)+\lambda M(a',b',c',d')=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} a' & -b' & -c' & -d' \\ b' & a' & -d' & c' \\ c' & d' & a' & -b' \\ d' & -c' & b' & a' \end{pmatrix}.$$

$$M(a,b,c,d)+\lambda M(a',b',c',d')=\begin{pmatrix} a+\lambda a' & -(b+\lambda b') & -(c+\lambda c') & -(d+\lambda d') \\ b+\lambda b' & a+\lambda a' & -(d+\lambda d') & c+\lambda c' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' & a+\lambda a' & -(b+\lambda b') \\ d+\lambda d' & -(c+\lambda c') & b+\lambda b' & a+\lambda a' \end{pmatrix}.$$

$M(a,b,c,d)+\lambda M(a',b',c',d')=M(a+\lambda a',b+\lambda b',c+\lambda c',d+\lambda d')$.

Et $M(a+\lambda a',b+\lambda b',c+\lambda c',d+\lambda d')\in H$ donc $M(a,b,c,d)+\lambda M(a',b',c',d')\in H$.

H contient l'élément neutre de $\mathcal{E}$ et H est stable par combinaison linéaire.

<u>H est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$.</u>

Q8. Montrer que la famille (I_4,E_1,E_2,E_3) est libre. En déduire une base et la dimension de H.

Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$. Calculons $M=\lambda_1 I_4+\lambda_2 E_1+\lambda_3 E_2+\lambda_4 E_3$

$$M=\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_4 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_4 & -\lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. <u>La famille (I_4,E_1,E_2,E_3) est une famille libre.</u>

De plus : soit $M(a,b,c,d)\in H$, alors $M(a,b,c,d)=aI_4+bE_1+cE_2+dE_3$.

<u>La famille (I_4,E_1,E_2,E_3) est donc une famille génératrice de H.</u>

<u>(I_4,E_1,E_2,E_3) est libre et génératrice de H, donc (I_4,E_1,E_2,E_3) est une base de H qui est donc de dimension 4.</u>

Q9. Produit de quaternions

a) Calculer les produits suivants : E_1I_4, E_1^2, E_1E_2 et E_1E_3.

$E_1I_4 = E_1$

$$E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & -1+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0-1 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0-1+0 \end{pmatrix}$$

$$E_1^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ donc } E_1^2 = -I_4.$$

De même : $$E_1E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } E_1E_2 = E_3.$$

Et : $$E_1E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } E_1E_3 = -E_2.$$

b) Justifier rapidement que, pour tous quaternions Q_1 et Q_2 (c'est-à-dire des éléments de H), Q_1Q_2 est aussi un quaternion.

Soient $Q_1 \in H$ et $Q_2 \in H$. Alors il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ et $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$Q_1 = \lambda_1 I_4 + \lambda_2 E_1 + \lambda_3 E_2 + \lambda_4 E_3$ et $Q_2 = \sigma_1 I_4 + \sigma_2 E_1 + \sigma_3 E_2 + \sigma_4 E_3$.

$Q_1Q_2 = (\lambda_1 I_4 + \lambda_2 E_1 + \lambda_3 E_2 + \lambda_4 E_3)(\sigma_1 I_4 + \sigma_2 E_1 + \sigma_3 E_2 + \sigma_4 E_3)$.

$$Q_1Q_2 = \lambda_1\sigma_1 I_4 I_4 + \sum_{j=1}^{3} \lambda_1 \sigma_{j+1} I_4 E_j + \sum_{i=1}^{3} \sigma_1 \lambda_{i+1} E_i I_4 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_{i+1}\sigma_{j+1} E_i E_j.$$

Or, d'après la question précédente, le produit de deux vecteurs de la famille (I_4, E_1, E_2, E_3) appartient à $Vect(I_4, E_1, E_2, E_3)$, donc $Q_1Q_2 \in Vect(I_4, E_1, E_2, E_3)$. Donc, Q_1Q_2 est aussi un quaternion.

Q10. Soit Q un quaternion (c'est-à-dire un élément de H), que l'on écrit sous la forme : $Q = aI_4 + bE_1 + cE_2 + dE_3$ avec a, b, c et d des réels. On définit $N(Q) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

a) Montrer que la transposée Q^T de Q appartient à H et donner ses coordonnées dans la base (I_4, E_1, E_2, E_3) de H.

$I_4^T = I_4$, $E_1^T = -E_1$, $E_2^T = -E_2$, $E_3^T = -E_3$.

$Q = aI_4 + bE_1 + cE_2 + dE_3$, donc $Q^T = (aI_4 + bE_1 + cE_2 + dE_3)^T = aI_4^T + bE_1^T + cE_2^T + dE_3^T = aI_4 - bE_1 - cE_2 - dE_3$.

Donc $Q^T \in Vect(I_4, E_1, E_2, E_3)$, donc $Q^T \in H$ et ses coordonnées dans la base (I_4, E_1, E_2, E_3) sont $(a, -b, -c, -d)$.

b) Démontrer que $QQ^T = N(Q)^2 I_4$.

$QQ^T = (aI_4 + bE_1 + cE_2 + dE_3)(aI_4 - bE_1 - cE_2 - dE_3)$

$QQ^T = a^2 I_4 - abE_1 - acE_2 - adE_3 + baE_1 - b^2 E_1E_1 - bcE_1E_2 - bdE_1E_3 +$
$caE_2 - cbE_2E_1 - c^2 E_2E_2 - cdE_2E_3 + daE_3 - dbE_3E_1 - dcE_3E_2 - d^2 E_3E_3$

D'après le tableau des produits des vecteurs constituant la base de H :

$QQ^T = a^2 I_4 - abE_1 - acE_2 - adE_3 + baE_1 + b^2 I_4 - bcE_3 + bdE_2 + caE_2 + cbE_3 + c^2 I_4 - cdE_1 + daE_3 - dbE_2 + dcE_1 + d^2 I_4$

$QQ^T = a^2 I_4 + b^2 I_4 + c^2 I_4 + d^2 I_4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) I_4$

Ainsi, $QQ^T = N(Q)^2 I_4$.

c) Montrer qu'il existe un entier p (à préciser) tel que $|\det(Q)| = N(Q)^p$.

$\det(Q) = \det(Q^T)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ donc $\det(QQ^T) = \det(Q)^2$.

Or $\det(QQ^T) = \det\left(N(Q)^2 I_4\right) = \left(N(Q)^2\right)^4 \det(I_4) = N(Q)^8$

Donc $|\det(Q)| = \sqrt{\det(QQ^T)} = N(Q)^4$ et avec $p = 4$, on a bien $|\det(Q)| = N(Q)^p$.

d) Toutes les matrices de H sont-elles inversibles?

$\det(Q) = 0 \Leftrightarrow N(Q) = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow Q = 0$

Toutes les matrices de H ne sont pas inversibles.

Mais toutes les matrices de H **sauf** la matrice nulle sont inversibles.

Q11. On considère un quaternion Q que l'on suppose unitaire, c'est à dire qu'il vérifie $N(Q) = 1$. On définit l'application u_Q par $u_Q(M) = QMQ^T$ pour tout M dans H.

a) Justifier que u_Q définit un endomorphisme de H.

On pourra utiliser **Q9** et **Q10**.

Si $M \in H$, alors, d'après la Q9) b), $QM \in H$, et $QMQ^T \in H$ donc $u_Q(M) \in H$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in H$ et $N \in H$.

$u_Q(M + \lambda N) = Q(M + \lambda N)Q^T = (QM + Q\lambda N)Q^T = QMQ^T + \lambda QNQ^T = u_Q(M) + \lambda u_Q(N)$.

Donc u_Q est un endomorphisme de H.

b) Montrer que I_4 et Q sont des vecteurs propres de u_Q associés à une même valeur propre que l'on précisera.

$u_Q(I_4) = QI_4Q^T = QQ^T = N(Q)^2 I_4 = 1I_4$.

I_4 est donc un vecteur propre u_Q associé à la valeur 1.

$u_Q(Q) = Q(Q)Q^T = Q(QQ^T) = QN(Q)^2 I_4 = N(Q)^2 QI_4 = N(Q)^2 Q = 1Q$.

Q est donc un vecteur propre u_Q également associé à la valeur 1.

c) Dans cette question, on suppose que Q n'est pas de la forme kI_4 avec $k \in \mathbb{R}$.

Déduire de la question précédente un vecteur propre Q' de u_Q appartenant à $Vect(E_1, E_2, E_3)$, sous-espace vectoriel de E engendré par (E_1, E_2, E_3).

(On pourra écrire Q sous la forme $Q = aI_4 + bE_1 + cE_2 + dE_3$ avec a, b, c et d des réels).

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $Q = aI_4 + bE_1 + cE_2 + dE_3$.

On définit $Q' = Q - aI_4 = bE_1 + cE_2 + dE_3$. $Q' \in Vect(E_1, E_2, E_3)$. $Q' \neq 0$ car $Q \neq kI_4$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$u_Q(Q') = u_Q(Q - aI_4) = u_Q(Q) - au_Q(I_4) = Q - aI_4 = 1Q'$ car u_Q est linéaire (Q11) a)).

Q' est donc un vecteur propre u_Q. (également associé à la valeur 1)

Q12. Étude d'un exemple :

On définit $Q = \frac{1}{2}(I_4 + E_1 + E_2 - E_3)$ et on note toujours u_Q l'endomorphisme associé à Q : pour tout M dans H, on a $u_Q(M) = QMQ^T$.

On note A_Q la matrice de u_Q dans la base (I_4, E_1, E_2, E_3) de H.

a) Vérifier que $N(Q) = 1$. En déduire, à l'aide de **Q11**, la première colonne de la matrice A_Q.

$Q = \frac{1}{2}(I_4 + E_1 + E_2 - E_3)$ donc $N(Q) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 4} = 1$.

D'après la question précédente, $u_Q(I_4) = I_4$. Donc la 1ère colonne de la matrice A_Q est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer les termes manquants, notés *, de la matrice $A_Q = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & -1 \\ * & -1 & * & 0 \end{pmatrix}$.

Pour la 3ème colonne, calculons, $u_Q(E_2)$ soit QE_2Q^T.

$Q = \frac{1}{2}(I_4 + E_1 + E_2 - E_3)$, donc, en utilisant les résultats de la question 10) a), $Q^T = \frac{1}{2}(I_4 - E_1 - E_2 + E_3)$.

$$u_Q(E_2) = \left(\frac{1}{2}(I_4 + E_1 + E_2 - E_3)\right) E_2 \left(\frac{1}{2}(I_4 - E_1 - E_2 + E_3)\right)$$

$$u_Q(E_2) = \frac{1}{4}(I_4E_2 + E_1E_2 + E_2E_2 - E_3E_2)(I_4 - E_1 - E_2 + E_3)$$

$$u_Q(E_2) = \frac{1}{4}(E_2 + E_3 - I_4 + E_1)(I_4 - E_1 - E_2 + E_3)$$

$$u_Q(E_2) = \frac{1}{4}(E_2(I_4 - E_1 - E_2 + E_3) + E_3(I_4 - E_1 - E_2 + E_3) - I_4(I_4 - E_1 - E_2 + E_3) + E_1(I_4 - E_1 - E_2 + E_3))$$

$$u_Q(E_2) = \frac{1}{4}(E_2I_4 - E_2E_1 - E_2E_2 + E_2E_3 + E_3I_4 - E_3E_1 - E_3E_2 + E_3E_3 - I_4 + E_1 + E_2 - E_3 + E_1I_4 - E_1E_1 - E_1E_2 + E_1E_3)$$

D'après le tableau des produits des vecteurs constituants la base de H :

$$u_Q(E_2) = \frac{1}{4}(E_2 + E_3 + I_4 + E_1 + E_3 - E_2 + E_1 - I_4 - I_4 + E_1 + E_2 - E_3 + E_1 + I_4 - E_3 - E_2)$$

$u_Q(E_2)=\frac{1}{4}(E_1+E_1+E_1+E_1)=E_1$

Ainsi : $A_Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$

c) En déduire que le sous-espace vectoriel $F=Vect(E_1,E_2,E_3)$ de H est stable par u_Q et donner, sans aucun calcul, la matrice de l'endomorphisme f induit par u_Q sur F.

$F=vect(E_1,E_2,E_3)$.

$u_Q(E_1)=-E_3$, donc $u_Q(E_1)\in F$.

$u_Q(E_2)=E_1$, donc $u_Q(E_2)\in F$.

$u_Q(E_3)=-E_2$, donc $u_Q(E_3)\in F$.

Ainsi, u_Q étant linéaire (Q11) a)), $u_Q(F)\subset F$.

Donc le sous espace vectoriel F est stable par l'application u_Q.

La matrice de l'endomorphisme f induit par u_Q sur F notée $mat(f)$ est : $mat(f)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$.

d) À l'aide des **Q12c** et **Q11**, trouver un vecteur directeur de l'axe de la rotation de matrice B vue en **Q6**.

On rappelle que :

- $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$, ce qui correspond à $mat(f)$.
- $Q=\frac{1}{2}(I_4+E_1+E_2-E_3)$
- comme dans la Q11) c), $Q'=Q-\frac{1}{2}I_4$.

Alors $Q'=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_2-\frac{1}{2}E_3$, donc $Q'\in F$.

f est l'endomorphisme induit par u_Q sur F donc, d'après Q11) c), $f(Q')=u_Q(Q')=Q'$.

On note V le triplet de coordonnées de Q' dans la base (E_1,E_2,E_3).

B est la matrice de f dans la base (E_1,E_2,E_3), donc $BV=V$.

(On peut vérifier par le calcul : $BV=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1/2+0\\0+0+1/2\\-1/2+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}=V$)

V est inchangé par la rotation décrite par la matrice B.

$V\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ est donc un vecteur directeur de l'axe de la rotation de matrice $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$.

Partie III. Optimisation du matériau du bras 1

Q13.

a) Déterminer l'expression du moment fléchissant $M_f(x)$ en fonction de F, L et de x.

Déterminons le torseur de Cohésion : $\{T_{cohésion}\} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(L-x) \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

Ainsi, l'expression du moment fléchissant est : $M_f(x) = -F(L-x)$.

b) On note $v(x)$ la déformée de la poutre. Rappeler la relation entre la dérivée seconde de $v(x)$, E et I. Donner les deux conditions aux limites qu'imposent la liaison encastrement.

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M_f(x)}{EI}.$$

La liaison encastrement implique un déplacement nul et une orientation horizontale de la poutre à l'origine, donc : $v(0) = 0$ et $\frac{dv(0)}{dx} = 0$

c) Donner l'expression de la déformée $v(x)$ en fonction de F, L, E et I et x. En déduire l'expression de $v(x = L)$.

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M_f(x)}{EI} = -\frac{F(L-x)}{EI}.$$

En intégrant : $\frac{dv(x)}{dx} = -\frac{F\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)}{EI} + cte_1$.

$\frac{dv(0)}{dx} = -0 + cte_1$ donc $cte_1 = 0$ d'après les conditions aux limites établies dans la question précédente.

En intégrant une nouvelle fois : $v(x) = -\frac{F\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)}{EI} + cte_2$.

$v(0) = -0 + cte_2$ donc $cte_2 = 0$ d'après les conditions aux limites établies dans la question précédente.

Ainsi : $v(x) = -\frac{Fx^2(3L-x)}{6EI}$ et $v(x = L) = -\frac{FL^3}{3EI}$.

Q14. Donner l'expression de la raideur K en fonction de E, I et de L.

$K = \frac{F}{|v(L=x)|}$ donc $K = \frac{F}{\left|-\frac{FL^3}{3EI}\right|}$ et $K = \frac{3EI}{L^3}$

Q15.

a) Donner l'expression du moment quadratique I en fonction b, h et de e.

La poutre est à section carrée creuse. Ainsi : $I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-2e)(h-2e)^3}{12}$.

b) On a $e << b$ et $e << h$. En ne gardant que les termes prépondérants, montrer que I peut s'écrire :

$$I \approx \frac{(3b+h)h^2 e}{6} \qquad (6)$$

L'épaisseur est petite devant la hauteur h et la largeur b : $e << h$ et $e << b$.

$$I = \frac{bh^3 - (b-2e)(h^3 - 6h^2e + 12he^2 - 8e^3)}{12} = \frac{bh^3 - (bh^3 - 6bh^2e + 12bhe^2 - 8be^3 - 2eh^3 + 12h^2e^2 - 24he^3 + 16e^4)}{12}.$$

$$I = \frac{h^2(3b+h)e - 6h(b+h)e^2 + 4(b+3h)e^3 - 8e^4}{6} = \frac{h^2(3b+h)e}{6} + o(e)$$

Donc $I \approx \frac{(3b+h)h^2e}{6}$.

Q16. En utilisant les équations (6) et (7), donner des expressions des fonctions f et g et du réel α telles que la masse m s'écrive,

$$m = \alpha \times f(\rho, E) \times g(b, h, L, K) \qquad (8)$$

En utilisant les équations $I \approx \frac{(3b+h)h^2 e}{6}$ et $K = \frac{3EI}{L^3}$, éliminons l'épaisseur e de l'expression de $m \approx 2\rho e(b+h)L$ (7) :

$$e \approx \frac{6I}{(3b+h)h^2} \text{ et } I = \frac{KL^3}{3E} \text{ donc } e \approx \frac{2\frac{KL^3}{E}}{(3b+h)h^2} \text{ et } m \approx 2\rho \frac{2\frac{KL^3}{E}}{(3b+h)h^2}(b+h)L \approx 4 \times \frac{\rho}{E} \times \frac{KL^4(b+h)}{(3b+h)h^2}.$$

En considérant $m = 4 \times \frac{\rho}{E} \times \frac{KL^4(b+h)}{(3b+h)h^2}$, m est de la forme $m = \alpha \times f(\rho, E) \times g(b, h, L, K)$ avec :

$\alpha = 4$, $f(\rho, E) = \frac{\rho}{E}$, et $g(b, h, L, K) = \frac{KL^4(b+h)}{(3b+h)h^2}$.

Q17. Expliquer et démontrer pourquoi il faut tracer une droite de pente 1 et choisir la plus grande ordonnée à l'origine pour avoir le meilleur indice de performance. Choisir un matériau.

b, h, L et K étant choisis, et ne dépendant pas du matériau, seuls ρ et E dépendent du matériau et sont à déterminer.

De plus, la masse m du bras est inversement proportionnelle à l'indice de performance $I_p = \frac{E}{\rho}$. Minimiser la masse revient à maximiser I_p.

En passant aux $\log$, $\log(I_p) = \log\left(\frac{E}{\rho}\right) = \log(E) - \log(\rho)$ et $\log(E) = \log(I_p) + \log(\rho)$.

Sur le diagramme d'Ashby proposé, dont les axes sont en échelle logarithmique, on doit tracer la droite $\log(E) = a\log(\rho) + b$ avec $a = 1$ et $b = \log(I_p)$ qui doit être le plus grand possible pour que la masse soit la plus petite possible.

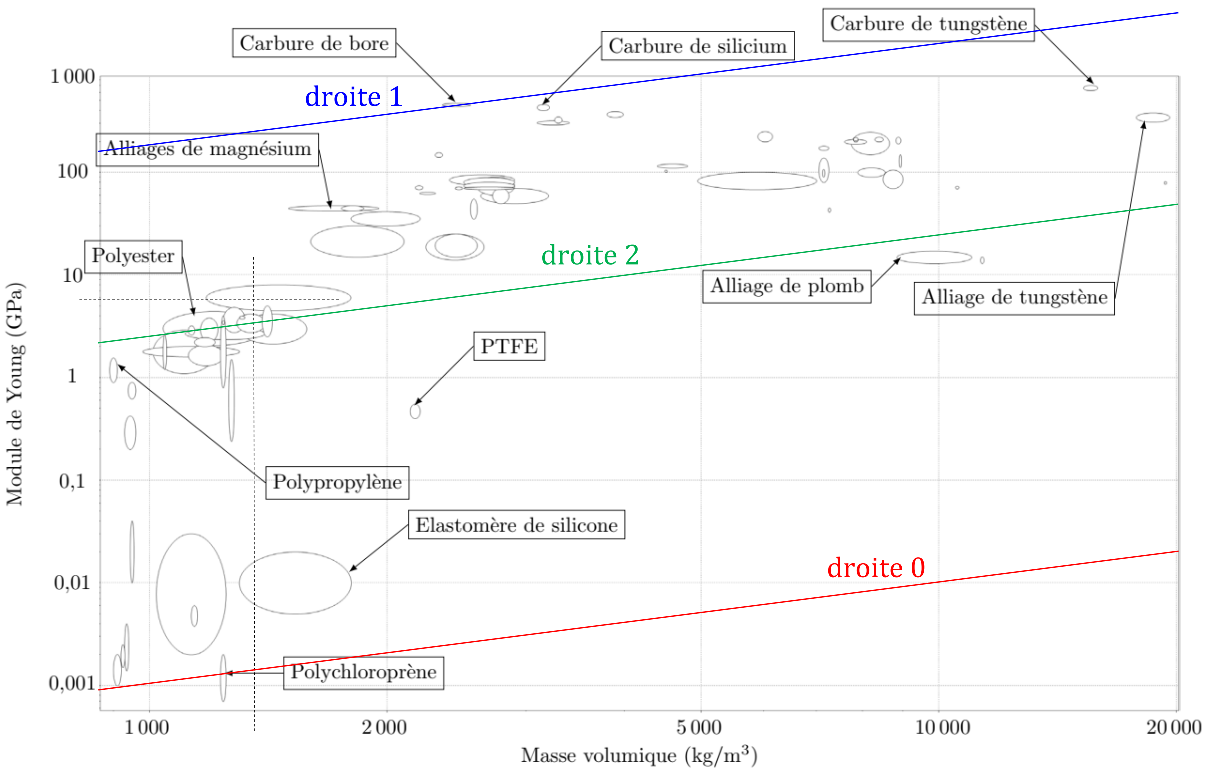

Figure 11 - Diagramme (log-log) du module de Young en fonction de la masse volumique

La pente 1 est tracée en parcourant une décade en abscisse et en ordonnée (droite 0).

L'énoncé affirme :

« *Il est composé de matériaux durables : 30 % de fibres de verre et 70 % de nylon.* » dans sa présentation générale (page 2) et :

« *De plus, la masse du Slick ne doit pas être trop importante pour faciliter son utilisation.*

C'est pourquoi, nous allons déterminer le matériau qui permet d'obtenir le meilleur compromis. D'autres critères interviennent dans le choix du matériau :

- *la limite élastique doit être supérieure à 140 MPa afin d'éviter toute déformation plastique lors de "petites" chutes ;*
- *le matériau doit résister à l'eau (douce et salée) et aux UV.* »

dans la présentation de la partie III (page 10).

On comprend que l'indice I_p le plus grand qui aboutit à proposer le carbure de bore est inadapté (droite 1).

On prendra donc la solution des polymères (droite 2)

(Pour aller plus loin, l'alliage de 30% de fibre de verre et de 70% de nylon est le PA6.6-30GF de masse volumique 1290 kg/m^3, et de module de Young de 5,5 GPa. Le point est placé sur le diagramme d'Ashby.)