# Devoir libre 05. Mathématiques

*À rendre jeudi 23 mars 2023 au plus tard*

Dans tout le problème, $a$ désigne un **entier non nul**. On considère une urne contenant $a$ boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.

## PARTIE I. Une première expérience aléatoire

On réalise l'expérience aléatoire suivante en deux temps :

**Phase 1**. *On commence par tirer les boules une par une* ***sans remise*** *jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note $N$ la variable aléatoire qui indique le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.*

**Phase 2**. *Ensuite, on remet toutes les boules dans l'urne et si $n \in \mathbb{N}^\star$ tirages ont été effectués lors de la phase 1, on réalise $n$ tirages successifs* **avec remise**. *On note $X$ la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la boule noire a été tirée dans cette seconde série de tirages.*

Pour tout entier $i \in [\![1, a+1]\!]$, on note $B_i$ l'événement : ≪ la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est blanche ≫ et $R_i$ l'événement : ≪ la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est noire ≫.

1. Pour tout $n \in [\![1, a+1]\!]$, exprimer l'événement $(N = n)$ en fonction des événements $R_i$ et $B_i$.
2. On suppose **dans cette question seulement** $a = 3$. En utilisant la formule des probabilités composées, calculer $P(N = n)$ pour tout $n \in [\![1, 4]\!]$. Que remarque t-on ?
3. On reprend le cas général à partir de cette question. Calculer $P(N = n)$ pour tout $n \in [\![1, a+1]\!]$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier $m$ non nul,
$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$
5. Calculer l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$.
6. Pour tout couple d'entiers $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, on considère la probabilité de $(X = k)$ sachant $(X = n)$, c'est-à-dire $P_{(N=n)}(X = k)$.
   (a) Que vaut $P_{(N=n)}(X = k)$ pour $k \geqslant n+1$ ?
   (b) Justifier que $P_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, où $p$ et $q$ sont à déterminer.
7. Exprimer $P(X = k)$ pour tout entier $k$ sous forme d'une somme en utilisant la formule des probabilités totales.
8. Montrer que $P(X = 0) = q(1 - q^{a+1})$, où $q$ est le réel trouvé à la question **6-b**.
9. Pour tous entiers $k$ et $n$ non nuls, exprimer $k\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.
10. En admettant que l'espérance de $X$ est $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{a+1} \left( \sum_{k=0}^{n} k P_{(N=n)}(X = k) \times P(N = n) \right)$, calculer l'espérance $E(X)$ en fonction de $a$.

## PARTIE II. Sommes de séries entières

On suppose ici $k \in \mathbb{N}$ fixé et on pose $S_k(x)$ la somme si elle existe de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.

1. Montrer que pour $n$ tendant vers $+\infty$, $\displaystyle\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$.
2. Déterminer, en utilisant la question **1** de cette **partie II**, le rayon de convergence $R$ de $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.
3. Pour tout $x \in ]-R, R[$, calculer $S_0(x)$ puis montrer que $S_1(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

**T.S.V.P** →

4. Calculer la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction
$$f : ]-\infty, 1[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

5. En déduire que pour tout $x \in ]-R, R[$, $S_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

6. Pour tout $x \in ]-R, R[$, établir que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

## PARTIE III. Une deuxième expérience aléatoire

On réalise l'expérience aléatoire suivante en deux temps :

**Phase 1**. *On commence par tirer les boules une par une* ***avec remise*** *jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note $T$ la variable aléatoire qui indique le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.*

**Phase 2**. *Ensuite, on remet la boule noire dans l'urne et si $n \in \mathbb{N}^\star$ tirages ont été effectués lors de la phase 1, on réalise $n$ tirages successifs* **avec remise**. *On note $Y$ la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la boule noire a été tirée dans cette seconde série de tirages.*

Pour tout entier $i \in \mathbb{N}^\star$, on note $B_i$ l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est blanche » et $R_i$ l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est noire ».

1. **Étude de $T$**
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer l'événement $(T = n)$ en fonction des événements $B_i$ et $R_i$.
   Calculer $P(T = 1)$ et $P(T = n)$ pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$.
   (b) Quelle est la loi suivie par $T$ ? Écrire alors l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de deux façons : directement en utilisant le cours pour la première façon et en calculant des sommes avec les résultats de la **partie II** pour la seconde façon.
   (c) On note $A$ l'événement : « La boule noire n'est jamais tirée (lors de la phase 1) ».
   Calculer $P(A)$ en remarquant que $\overline{A} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} (T = n)$.

2. **Étude de la loi de $Y$**
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $P_{(T=n)}(Y = k)$.
   (On pourra s'inspirer du résultat de la question **6** de la **partie I**.)
   (b) Montrer que $P(Y = 0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(P_{(T=n)}(Y = 0) \times P(T = n)\right) = \frac{a}{2a+1}$.
   (c) On suppose $k \geqslant 1$. Montrer :
   $$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(P_{(T=n)}(Y = k) \times P(T = n)\right) = \frac{(a+1)^2}{a(2a+1)} r^k,$$
   où $r$ est un réel vérifiant $0 < r < 1$ à déterminer en fonction de $a$.

3. **Calcul de l'espérance de $Y$**. On veut calculer $E(Y)$ de deux manières.
   (a) **Première méthode**. Calculer $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kP(Y = k)$ en utilisant le résultat de la question **2-c** de cette **partie III** et le calcul de $S_1(x)$ de la **partie II**.
   (b) **Deuxième méthode**. Simplifier pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{a+1}\right)^j \cdot \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1-j}$.
   Justifier ensuite que :
   $$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} kP_{(T=n)}(Y = k) \times P(T = n)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} kP_{(T=n)}(Y = k) \times P(T = n)\right).$$
   Calculer alors cette double somme en utilisant la question **9** de la **partie I**. Retrouver ainsi la valeur de $E(Y)$ trouvée à la question **3-a**.