CORRECTION Devoir libre 05

Partie I

a désigne un **entier non nul**. On considère une urne contenant a boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.
On réalise l'expérience aléatoire suivante en deux temps :

Phase 1. *On commence par tirer les boules une par une* ***sans remise*** *jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.*
Phase 2. *Ensuite, on remet toutes les boules dans l'urne et si $n \in \mathbb{N}^\star$ tirages ont été effectués lors de la phase 1, on réalise n tirages successifs* **avec remise**. *On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la boule noire a été tirée dans cette seconde série de tirages.*

Pour tout entier $i \in [\![1, a+1]\!]$, on note B_i l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est blanche » et R_i l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est noire ».

1. Pour tout $n \in [\![1, a+1]\!]$,

$$(N=1) = R_1 \text{ et } (N=n) = B_1 \cap ... \cap B_{n-1} \cap R_n.$$

2. On suppose **dans cette question seulement** $a = 3$. En utilisant la formule des probabilités composées, calculons $P(N=n)$ pour tout $n \in [\![1, 4]\!]$.

- $P(N=1) = \dfrac{1}{4}$ car on obtient la boule noire directement et il y a 3 boules blanches.
- $P(N=2) = P(B_1)P_{B_1}(R_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$.
- $P(N=3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(R_3) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.
- $P(N=4) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3)P_{B_1\cap B_2\cap B_3}(R_4) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{4}$.
- Conclusion : N suit la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.

3. Calculons $P(N=n)$ pour tout $n \in [\![1, a+1]\!]$.

- $P(N=1) = \dfrac{1}{a+1}$ car on obtient la boule noire directement et il y a a boules blanches.
- $P(N=2) = P(B_1)P_{B_1}(R_2) = \dfrac{a}{a+1} \times \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a+1}$.
- Cas général. On suppose $n \geqslant 2$.

$$P(N=n) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3)P_{B_1\cap B_2\cap B_3}(B_4)...P_{B_1\cap...\cap B_{n-2}}(B_{n-1})P_{B_1\cap...\cap B_{n-1}}(R_n).$$

On passe aux valeurs des probabilités.

$$P(N=n) = \frac{a}{a+1}.\frac{a-1}{a}.\frac{a-2}{a-1}.\frac{a-3}{a-2}...\frac{a-(n-3)}{a-(n-4)}.\frac{a-(n-2)}{a-(n-3)}.\frac{1}{a-(n-2)}.$$

Par effet domino, il reste $P(N=n) = \dfrac{1}{a+1}$. C'est la loi uniforme sur $[\![1, a+1]\!]$.

4. Sans problème, on montre que pour tout entier m non nul,

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Par exemple, pour la deuxième, elle est vraie pour $m = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$.

Puis on suppose vraie au rang m.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2.$$

Puis on regroupe dans la dernière somme.

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{(m+1)\left[m(2m+1) + 6(m+1)\right]}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

C'est la formule au rang $m+1$.

5. • Calculons l'espérance $E(N)$.
$E(N) = \sum_{k=1}^{a+1} \frac{k}{a+1} = \frac{a+2}{2}$.

• Calculons d'abord $E(N^2) = \sum_{k=1}^{a+1} \frac{k^2}{a+1} = \frac{(a+2)(2a+3)}{6}$. Puis :

$$V(N) = E(N^2) - E^2(N) = \frac{(a+2)(2a+3)}{6} - \frac{(a+2)^2}{4} = \frac{a(a+2)}{12}.$$

6-a Pour tout couple d'entiers $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, on considère la probabilité de $(X = k)$ sachant $(X = n)$, c'est-à-dire $P_{(N=n)}(X = k)$.
Dans le cas où $k \geqslant n+1$ alors $P_{(N=n)}(X = k) = 0$.

6-b Il est clair que $P_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{(a+1)^k} \frac{a^{n-k}}{(a+1)^{n-k}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

7. On a : $P(X = k) = \sum_{n=k}^{a+1} P_{(N=n)}(X = k) \times P(N = n)$.

8. On a : $P(X = 0) = \sum_{n=0}^{a+1} P_{(N=n)}(X = k) \times P(N = n) = \sum_{n=0}^{a+1} \frac{a^n}{(a+1)^n} \times \frac{1}{a+1}$. On arrange en posant $q = a/(a+1)$.

$$P(X = 0) = (1-q) \sum_{n=0}^{a+1} q^n = q(1 - q^{a+1}).$$

9. Pour tous entiers k et n non nuls, exprimons $k\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.

$$k\binom{n}{k} = \frac{k.n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

10. En admettant que l'espérance de X est $E(X) = \sum_{n=1}^{a+1} \left(\sum_{k=0}^{n} k P_{(N=n)}(X = k) \times P(N = n) \right)$, calculons $E(X)$ en fonction de a.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{a+1} \left(\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{1}{(a+1)^k} \frac{a^{n-k}}{(a+1)^{n-k}} . \frac{1}{a+1} \right) = \sum_{n=1}^{a+1} \frac{1}{a+1} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \frac{1}{(a+1)^k} \frac{a^{n-k}}{(a+1)^{n-k}}.$$

On utilise **9.**

$$E(X) = \sum_{n=1}^{a+1} \frac{n}{a+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{(a+1)^k} \frac{a^{n-k}}{(a+1)^{n-k}} =$$
$$\sum_{n=1}^{a+1} \frac{n}{a+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{(a+1)^{j+1}} \frac{a^{n-1-j}}{(a+1)^{n-1-j}}.$$

On reconnait le binôme de Newton.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{a+1} \frac{n}{a+1} . \frac{1}{a+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{(a+1)^j} \frac{a^{n-1-j}}{(a+1)^{n-1-j}} =$$
$$\sum_{n=1}^{a+1} \frac{n}{a+1} . \frac{1}{a+1} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} \right)^{n-1}.$$

On obtient : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{a+1} n . \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{a+2}{2a+2}$.

PARTIE II. Sommes de séries entières

On suppose ici $k \in \mathbb{N}$ fixé et on pose $S_k(x)$ la somme si elle existe de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.

1. Montrons que pour n tendant vers $+\infty$, $\displaystyle\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$$

car il y a k termes dans le produit $n(n-1)...(n-(k-1))$ et chacun des termes de ce produit est équivalent à n.

2. Déterminons, en utilisant la question **1** de cette **partie II**, le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.

$$\text{Quand } n \to +\infty : \frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{(n+1)^k}{k!} \times \frac{k!}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k.$$

Cette dernière quantité tend vers 1 quand n tend vers ∞ et donc $R = 1$.

3. Pour tout $x \in]-R, R[$, calculons $S_0(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

De même, $S_1(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$. Or,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, $S_1(x) = x \times \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

4. Calculons la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f^{(3)}(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}.$$

Sans être médium, on sent que $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$. On suppose vrai au rang k.

$$f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)' = \frac{k!(k+1)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}.$$

5. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{k!}.\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}.$$

Or $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^{(k)} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}$.

$$f^{(k)}(x) \times \frac{x^k}{k!} = S_k(x) \Rightarrow S_k(x) = \frac{x^k}{k!} \times \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

6. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n.$$

On se ramène aux dérivées de f.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 f^{(2)}(x) + xf'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

PARTIE III. Une deuxìeme expérience aléatoire

On réalise l'expérience aléatoire suivante en deux temps :

Phase 1. *On commence par tirer les boules une par une* **avec remise** *jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note T la variable aléatoire qui indique le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.*

Phase 2. *Ensuite, on remet la boule noire dans l'urne et si $n \in \mathbb{N}^\star$ tirages ont été effectués lors de la phase 1, on réalise n tirages successifs* **avec remise**. *On note Y la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la boule noire a été tirée dans cette seconde série de tirages.*

Pour tout entier $i \in \mathbb{N}^\star$, on note B_i l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est blanche » et R_i l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est noire ».

1-a • Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimons l'événement $(T = n)$ en fonction des événements B_i et R_i. On a immédiatement : $(T = 1) = R_1$ et pour $n \geqslant 2$, $(T = n) = B_1 \cap ... \cap B_{n-1} \cap R_n$.

• $P(T = 1) = \dfrac{1}{a+1}$ et $P(T = n) = \left(\dfrac{a}{a+1}\right)^{n-1}.\left(\dfrac{1}{a+1}\right)$ pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$.

1-b. La loi suivie par T est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{a+1}$. Posons $p = \dfrac{1}{a+1}$ et $q = \dfrac{a}{a+1}$.

- Première méthode :

$$E(T) = p = a+1 \text{ et } V(T) = \frac{q}{p^2} = \frac{\dfrac{a}{a+1}}{\dfrac{1}{(a+1)^2}} = a(a+1).$$

- Deuxième méthode.

$$E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(T=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1}p = p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Puis :

$$E(T^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(T=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^{n-1} p = \frac{p}{q} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n.$$

On applique **6** de la **partie II**.

$$E(T^2) = \frac{p}{q} \times \frac{q^2+q}{(1-q)^3} = \frac{1}{p^2}(q+1) = \frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

Et alors $V(T) = E(T^2) - E^2(T) = \dfrac{q}{p^2} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$.

1-c On note A l'événement : ≪ La boule noire n'est jamais tirée (lors de la phase 1) ≫.

Calculons $P(A)$ en remarquant que $\overline{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (T=n)$.

$$P\left(\overline{A}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}p = p\frac{1}{1-q} = 1.$$

2-a Calculons pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $P_{(T=n)}(Y=k)$.
On peut remarquer que si $k \geqslant n+1$, $P_{(T=n)}(Y=k) = 0$.
Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_{(T=n)}(Y=k) = \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{a+1}\right)^k \left(\dfrac{a}{a+1}\right)^{n-k}$.

2-b On a par la formule des probabilités totales :

$$P(Y=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(P_{(T=n)}(Y=0) \times P(T=n)\right) =$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\binom{n}{0} \left(\frac{1}{a+1}\right)^0 \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-0} \times P(T=n)\right).$$

On arrange l'affaire.

$$P(Y=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \times \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1} . \left(\frac{1}{a+1}\right)\right).$$

On arrange encore un peu.

$$P(Y=0) = \left(\frac{a}{a+1}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{a+1}\right) \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{2n}.$$

On utilise la somme d'une suite géométrique de raison $\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^2$.

$$P(Y=0)=\left(\frac{a}{a+1}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{a+1}\right)\times\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2}\times\frac{1}{1-\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2}}.$$

Il reste à arranger.

$$P(Y=0)=\left(\frac{a+1}{a}\right)\times\left(\frac{1}{a+1}\right)\times\frac{a^2}{(a+1)^2-a^2}=\frac{a}{2a+1}.$$

2-c La première égalité vient de la formule des probabilités totales.

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\left(P_{(T=n)}(Y=k)\times P(T=n)\right)=$$
$$\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{k}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-k}\times P(T=n)\right).$$

On arrange l'affaire.

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{k}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-k}\times\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1}.\left(\frac{1}{a+1}\right)\right).$$

On arrange encore l'affaire.

$$P(Y=k)=\left(\frac{a}{a+1}\right)^{-k-1}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2n}=$$
$$\left(\frac{1}{a+1}\times\frac{a}{a+1}\right)^{k+1}S_k\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2}.$$

On rappelle que $S_k(x)=\dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

$$P(Y=k)=\frac{1}{a^{k+1}}\times\frac{\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2k}}{\left(1-\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2}\right)^{k+1}}.$$

On arrange.

$$P(Y=k)=\frac{1}{a^{k+1}}\times\frac{a^{2k}(a+1)^2}{((a+1)^2-a^2)^{k+1}}=\frac{(a+1)^2}{a(2a+1)}r^k,$$

où $r=\dfrac{a}{2a+1}$.

3-a Première méthode. Calculons $E(Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}kP(Y=k)$ en utilisant le résultat de la question **2-c** de cette **partie III** et le calcul de $S_1(x)$ de la **partie II**.

$$\sum_{k=0}^{+\infty}kP(Y=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{(a+1)^2}{a(2a+1)}r^k=\frac{(a+1)^2}{a(2a+1)}\sum_{k=1}^{+\infty}kr^k.$$

Puis on utilise $S_1(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} kr^k$.

$$S_1(r) = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

On injecte dans $E(Y)$.

$$E(Y) = \frac{(a+1)^2}{a(2a+1)} \times \frac{\dfrac{a}{2a+1}}{\left(1 - \dfrac{a}{2a+1}\right)^2}.$$

On arrange encore l'affaire.

$$E(Y) = \frac{(a+1)^2}{(2a+1)^2\left(1 - \dfrac{a}{2a+1}\right)^2} = \frac{(a+1)^2}{((2a+1)-a)^2} = 1.$$

3-b Deuxième méthode

- Simplifions pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{a+1}\right)^j \cdot \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1-j}$. On remarque que c'est la formule du binôme de Newton.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{a+1}\right)^j \cdot \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1-j} = \left(\frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1}\right)^{n-1} = 1^{n-1} = 1.$$

- On écrit $E(Y)$ en utilisant la loi de probabilité du couple (Y, T). Puis on utilise la formule de Bayes $P_{(T=n)}(Y=k) \times P(T=n) = P(T=n, Y=k)$.

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} kP(Y=k,\ T=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} kP_{(T=n)}(Y=k) \times P(T=n)\right)\right).$$

On peut permuter les deux $\sum$ dans un premier temps car les deux sommes sont indépendantes.

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} kP_{(T=n)}(Y=k) \times P(T=n)\right).$$

Puis on remarque que $P_{(T=n)}(Y=k) = 0$ pour $k \geqslant n+1$. Et la nouvelle deuxième somme court de $k=0$ à $k=n$ seulement.

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} kP_{(T=n)}(X=k) \times P(T=n)\right).$$

On remplace $P_{(T=n)}(X=k)$ et $P(T=n)$ par leurs valeurs.

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \left(\frac{1}{a+1}\right)^k \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{a+1}\right)^1 \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1}.$$

On regroupe les puissances et on use de $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

$$E(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{k+1}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2n-k-1}.$$

On fait un glissement d'indice $j \leftarrow k-1$.

$$E(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{j+2}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2n-j-2}.$$

On arrange un peu pour en arriver à une certaine somme déjà calculée.

$$E(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{a+1}\right)^{2}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{j}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1-j}.$$

$$E(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{a+1}\right)^{2}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{a+1}\right)^{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1}.$$

Il reste à utiliser $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$ pour tout $x\in]-1,1[$.

$$E(Y)=\left(\frac{1}{a+1}\right)^{2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{a}{a+1}\right)^{2}}=\left(\frac{1}{a+1}\right)^{2}\times(a+1)^2=1.$$

On retrouve le résultat annoncé.