

Devoir libre 01

2TSI. Mathématiques

A rendre le mercredi 20 Septembre 2023

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 01

On pose pour tout n entier supérieur ou égal à 2, $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$.

1. Montrer que f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Déterminer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution positive x_n . Montrer que $0 < x_n < 1$.
3. Montrer que $f_n(x_{n+1}) > 0$. En déduire que la suite (x_n) est strictement croissante.
4. Justifier que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente vers $l \in]0, 1[$.
5. Montrer que $l = 1$.
6. On définit ϵ_n par $x_n = l - \epsilon_n$. Que peut-on dire alors de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n$?
Montrer que $\ln(\epsilon_n) \sim -n\epsilon_n$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\epsilon_n$.

Exercice 02

On veut étudier la fonction

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x}\right).$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $u : x \mapsto \frac{2x}{1+x}$ sur son domaine de définition.
2. En déduire le domaine de définition de f .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Déterminer un développement limité au voisinage de 0 de f à l'ordre 3.
En déduire la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.
5. Tracer la courbe représentative de f en n'oubliant pas les tangentes aux points intéressants.

Exercice 03

1. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $x = 1$ de

$$x \mapsto e^{x^2+x} - e^{2x} \text{ et de } x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

2. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}.$$