Correction Devoir libre 01

2TSI. Mathématiques

Exercice 01

1. On pose pour tout n entier supérieur ou égal à 2, $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$. Alors $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ pour $x \geqslant 0$ et donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$.

2. Comme f_n est continue et strictement croissante et comme $f_n(0)f_n(1) < 0$, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution positive x_n. Et il est clair que $0 < x_n < 1$.

3. On a : $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1$ et comme $f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0$, on en déduit :

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n \left(1 - x_{n+1}\right) > 0.$$

En effet, $x_{n+1} \in]0, 1[$.
Comme f_n est strictement croissante et que $f_n(x_n) = 0$, on en déduit que $x_n < x_{n+1}$. La suite (x_n) est strictement croissante.

4. La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est bornée et croissante donc convergente vers $l \in]0, 1]$.

5. Si $l < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(x_n) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n^n) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Comme pour tout n, $x_n^n + x_n - 1 = 0$ et en passant à la limite, $l = 1$ ce qui est absurde. En conclusion, l'hypothèse $l < 1$ est absurde et $l = 1$.

6. On définit ϵ_n par $x_n = l - \epsilon_n$. Alors $\epsilon_n = 1 - x_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.
Puis :

$$x_n^n + x_n - 1 = 0 \Rightarrow \left(1 - \epsilon_n\right)^n - \epsilon_n = 0 \Rightarrow \left(1 - \epsilon_n\right)^n = \epsilon_n.$$

On en déduit que $\ln\epsilon_n = n\ln\left(1 - \epsilon_n\right)$. Comme ϵ_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$,

$$\ln\left(1 - \epsilon_n\right) \sim -\epsilon n \Rightarrow \ln(\epsilon_n) \sim -n\epsilon_n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\epsilon_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\epsilon_n = +\infty$.

Exercice 02

1. La fonction $u : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus -1$ et comme $u'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2} > 0$, la fonction u est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et prend ses valeurs dans $]2, +\infty[$ et sur $]-1, +\infty[$ et prend alors ses valeurs dans $]-\infty, 2[$.

2. Donnons le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$.
Il faut que $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right| \leqslant 1$ et donc $|u(x)| \leqslant 1$. Puis :

$$\frac{2x}{1+x} = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ et } \frac{2x}{1+x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

D'après l'étude de **1**, f est donc définie sur $D_f = \left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$.

3. Sur D_f, f est continue et dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}, 1\right[$. Alors sur cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \frac{2}{(1+x)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x)^2}}} > 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur D_f et comme $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, f est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. En 0, $f(0) = 0$ et comme $f'(0) = 2$, $y = 2x$ est une équation de la tangente à f en $(0, 0)$.
Déterminons un développement limité aÂ l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.

$$f(x) = \arcsin\left(2x(1-x+x^2) + o(x^3)\right) = \arcsin\left(2x - 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)\right).$$

Puis, on sait que $\arcsin t = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ au voisinage de $t = 0$, donc en posant $t = 2x - 2x^2 + 2x^3$,

$$f(x) = 2x-2x^2+2x^3+\frac{(2x-2x^2+2x^3)^3}{6}+o(x^3) = 2x-2x^2+2x^3+\frac{8x^3}{6}+o(x^3) = 2x-2x^2+\frac{10x^3}{3}+o(x^3).$$

On remarque que la courbe est sous la tangente.

5. Il reste à faire le tracé en n'oubliant pas qu'en $x = -1/3$ et $x = 1$, la courbe présente une tangente verticale.

Exercice 03

1. Effectuons un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $x = 1$ de $x \mapsto e^{x^2+x} - e^{2x}$ et de $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
On pose $x = 1 + h$ ou $h = x - 1$. On a :

$$e^{x^2+x} - e^{2x} = e^{2+3h+h^2} - e^{2+2h} = e^2\left(e^{3h+h^2} - e^{2h}\right) = e^2\left(1 + 3h - (1+2h) + o(h)\right) = e^2 h + o(h).$$

Et de même,

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}(1+h)\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2}h\right) = -\frac{\pi h}{2} + o(h).$$

2 Déduisons en $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$.
On utilise les DL plus haut :

$$\frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{e^2 h + o(h)}{-\frac{\pi h}{2} + o(h)} = \frac{e^2 + o(1)}{-\frac{\pi}{2} + o(1)}.$$

Et donc : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = -\frac{2e^2}{\pi}$.