DEVOIR SURVEILLE 01

TSI2. MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Samedi 30 septembre 2023

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

Soit deux complexes p et q **non nuls** et l'équation dans $\mathbb{C}$: (E) : $z^2 - 2pz + q = 0$.
On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation (E).

1. Écrire p et q en fonction de z_1 et de z_2.
2. Justifier le fait que z_1 et z_2 ne sont pas nuls.
3. Montrer que pour tout couple de réels (θ_1, θ_2), $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\dfrac{\theta_1}{2} - \dfrac{\theta_2}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2}\right)}$.
4. On suppose **dans cette question** que $|z_1| = |z_2|$. On pose alors $z_1 = re^{i\theta_1}$ et $z_2 = re^{i\theta_2}$.
   Montrer que $\dfrac{p^2}{q} = \cos^2 t$, où t est un réel à préciser en fonction de θ_1 et θ_2.
5. On suppose ici que $\dfrac{p^2}{q}$ est réel et appartient à $]0, 1]$ et donc il existe un réel $\lambda \geqslant 1$ tel que $q = \lambda p^2$.
   (a) Écrire le discriminant complexe Δ de l'équation du second degré (E) en fonction de p et de λ.
   Écrire de même z_1 et z_2 en fonction de p et de λ.
   (b) Montrer que $|z_1|^2 = p\overline{p}\lambda$.
   (c) Montrer que les modules de z_1 et de z_2 sont égaux.

   On peut donc conclure que z_1 et z_2 ont le même module si et seulement si $\dfrac{p^2}{q}$ est réel et appartient à l'intervalle $]0, 1]$.
6. On suppose que $\arg(z_1) = \arg(z_2)\,(2\pi)$. On pose $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta}$.
   Écrire $\dfrac{q}{p^2}$ sous la forme d'un rapport utilisant uniquement les valeurs r_1 et r_2.
7. Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique : $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $\forall y \in \mathbb{R}^\star$, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
8. Montrer que z_1 et z_2 ont les mêmes arguments si et seulement si $\dfrac{q}{p^2}$ est réel et appartient à $]0, 1]$.
   Dans le sens direct, on pourra partir de l'égalité trouvée en **6.**
   Dans le sens réciproque, on pourra s'inspirer de plus haut en introduisant $\lambda \leqslant 1$ tel que $q = \lambda p^2$.
9. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour laquelle $z_1 = z_2$.
   Retrouver ce résultat directement.

EXERCICE 02

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $x_0 = y_0 = 0$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} & = & \sqrt{7 + x_n} \end{array} \right. .$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $[0, 7]$.
   On utilisera le fait que $\sqrt{14} < 7$.
2. On suppose que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels a et b.
   Donner les valeurs de a et de b.
   Indication : on pourra utiliser le fait que a et b sont nécessairement dans $[0, 7]$ et on pourra se ramener à une équation du second degré vérifiée par a seul.

T.S.V.P $\rightarrow$

On pose dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = x_n - a$ et $t_n = y_n - b$, où a et b sont les réels trouvés plus haut.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = \dfrac{3 - y_n}{\sqrt{7 - y_n} + 2}$. En déduire que $|s_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_n|$.

   Montrer, de même, que : $|t_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{3}|s_n|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_{n+2}| \leqslant \alpha|s_n|$, où α est à déterminer.
5. En déduire la convergence des suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 03

On considère la fonction

$$f : x \mapsto (1 + \sin^3 x)^{1/4}$$

définie pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Justifier le fait que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Trouver le signe de f' sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc le sens de variation de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Déterminer les valeurs pour lesquelles $f'(x) = 0$ sur cet intervalle.
3. On pose $x = -\dfrac{\pi}{2} + t$. Écrire en fonction de $\sin t$ et de $\cos t$:
$$g(t) = f(x) \text{ et } h(t) = f'(x).$$
4. Écrire les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$ respectivement de $\cos t$, $\sin t$ puis de $1 - \cos^3 t$.
5. Déterminer $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)$. En déduire que f peut être prolongé par continuité en $x = -\dfrac{\pi}{2}$.
6. Déterminer un équivalent de $h(t)$ quand $t = 0^+$. En déduire alors $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t)$.
   Le prolongement de la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$?
   Que peut-on dire de la demi-tangente à droite au point $x = -\dfrac{\pi}{2}$ au graphe de f ?

EXERCICE 04

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, qui au polynôme P associe le polynôme :

$$\phi(P) = \frac{1}{2}\left[P(X+1) + P(X-1)\right].$$

1. Calculer $\phi(X^k)$ pour k entier de 0 à 4.
2. Déterminer en fonction de ceux de P, le degré et le coefficient dominant de $\phi(P)$.
   Indication : On commencera par intuiter le résultat à partir de la question précédente puis on posera P un polynôme de degré n de coefficient dominant $a_n \neq 0$ puis on justifiera et on utilisera le fait que $P(X+1) = a_n X^n + Q_n$, où Q_n est un polynôme de degré au plus $n-1$ et que $P(X-1)$ vérifie une égalité comparable.
3. Déterminer un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi(P_n) = X^n$ dans quatre cas : $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. *Indication : on pourra s'aider des deux premières questions pour P_0 et P_1. Pour P_2, on commencera par justifier qu'il s'écrit $P_2 = X^2 + \alpha X + \beta$ et on trouvera α et β et pour P_3, on commencera par justifier qu'il s'écrit $P_3 = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ et on trouvera α, β et γ.*
4. On suppose admis l'existence et l'unicité de $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi(P_n) = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc tel que l'on ait l'égalité (1) : $\dfrac{1}{2}\left(P_n(X+1) + P_n(X-1)\right) = X^n$.
   (a) En dérivant l'égalité (1), exprimer pour tout $n \geqslant 1$, P_n' en fonction de P_{n-1}.
   (b) Montrer par récurrence (sur l'entier k) que si k est un entier inférieur ou égal à n,
$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}.$$